Principiile dinamicii solidului rigid

Amintim că în cazul punctului material de masă m și acționat de o forță rezultantă $\vec{F}$, ecuația de mișcare furnizată de legea a II-a a lui Newton este

$$m\vec{a} = \vec{F}.$$

Această ecuație vectorială conduce, prin proiectarea pe axele unui reper $R(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, la un sistem de trei ecuații diferențiale scalare care, pentru a fi rezolvat, trebuie însoțit de condițiile inițiale (poziția și viteza punctului la momentul inițial $t=0$). Se obține următoarea formă numită problema Cauchy pentru punctul material liber având trei grade de libertate:

$$m\ddot{x} = F_x \qquad x(0) = x_0 \qquad \dot{x}(0) = v_{0x}$$

$$m\ddot{y} = F_y \qquad y(0) = y_0 \qquad \dot{y}(0) = v_{0y}$$

$$m\ddot{z} = F_z \qquad z(0) = z_0 \qquad \dot{y}(0) = v_{0z}$$

Dacă punctul este supus la legături, atunci reacțiunile acestora măresc numărul de necunoscute dar sistemul va conține în plus și ecuațiile de legătură.

În cazul solidului rigid liber, acesta are șase grade de libertate, deci sunt necesare șase ecuații diferențiale scalare pentru a determina cei șase parametri de poziție. Ei sunt cele trei coordonate ale polului reperului solidar cu corpul și trei cosinusuri directoare independente ori cele trei unghiuri ale lui Euler (există și alte triplete de unghiuri care pot stabili poziția axelor reperului solidar cu corpul cum ar fi unghiurile lui Bryan).

Pentru a obține șase ecuații scalare independente este necesar să se formuleze două ecuații vectoriale independente. Aceste ecuații vectoriale sunt furnizate de două principii (postulate, axiome, legi), și anume:

1. Principiul impulsului.
2. Principiul momentului cinetic.

Principiul impulsului

Se consideră un solid rigid (S) asupra căruia acționează un sistem de forțe care are torsorul într-un pol fix O al unui reper $R(O, \bar{i}, \bar{j}, \bar{k})$

$$T_O = \begin{cases} \vec{R} = R_x\bar{i} + R_y\bar{j} + R_z\bar{k} \\ \vec{M}_O = M_{Ox}\bar{i} + M_{Oy}\bar{j} + M_{Oz}\bar{k} \end{cases}$$

~~Notăm cu G centrul~~ de masă al corpului

Impulsul solidului rigid este, după cum am văzut $\vec{H} = M\vec{v}_G$, unde $\vec{v}_G$ este viteza centrului de masă al corpului.

Principiul impulsului afirmă că derivata în raport cu timpul a impulsului unui solid rigid este egală cu vectorul rezultant al forțelor care acționează asupra corpului:

$$\boxed{\dot{\vec{H}} = \vec{R}}$$

Deoarece $\vec{H} = M\vec{v}_G$ înseamnă că $\dot{\vec{H}} = M\vec{a}_G$ unde $\vec{a}_G$ este accelerația centrului de masă al solidului. Teorema impulsului capătă astfel forma

$$\boxed{M\vec{a}_G = \vec{R}} \Rightarrow \begin{cases} M\ddot{x}_G = R_x \\ M\ddot{y}_G = R_y \\ M\ddot{z}_G = R_z \end{cases}$$

Relația de mai sus se mai numește teorema mișcării centrului de masă: masa unui solid rigid înmulțită cu accelerația centrului de masă este egală cu vectorul rezultant al sistemului de forțe care acționează asupra corpului.

Ca și în cazul punctului material, și în cazul solidului rigid dacă $\vec{R} = 0$ impulsul se conservă. Are loc egalitatea

$$M\vec{a}_G = 0$$

care conduce la

$$M\vec{v}_G = M\vec{v}_G^{\,0} = \text{constant}$$

~~adică~~

$$\vec{v} = \vec{v}_G^{\,0}.$$

în timpul mișcării. Aceasta înseamnă că dacă impulsul se conservă, centrul de masă se mișcă rectiliniu și uniform dacă $\vec{v}_G^0 \neq 0$ sau rămâne în repaos dacă $\vec{v}_G^0 = 0$.

Principiul momentului cinetic

Momentul cinetic al unui solid rigid în raport cu polul fix O este:

$$\vec{K}_O = \vec{r}_{O'} \times \vec{H} + M\vec{r}_G' \times \vec{v}_{O'} + \vec{K}_{O' rot}$$

Principiul momentului cinetic afirmă că derivata în raport cu timpul a momentului cinetic al unui rigid, calculat în raport cu un pol fix O, este egală cu vectorul moment rezultant calculat în raport cu același pol O:

$$\boxed{\dot{\vec{K}}_O = \vec{\mathcal{M}}_O} \Rightarrow \begin{cases} \dot{K}_{Ox} = \mathcal{M}_{Ox} \\ \dot{K}_{Oy} = \mathcal{M}_{Oy} \\ \dot{K}_{Oz} = \mathcal{M}_{Oz} \end{cases}$$

Derivăm expresia momentului cinetic de mai sus:

$$\dot{\vec{K}}_O = \dot{\vec{r}}_{O'} \times \vec{H} + \vec{r}_{O'} \times \dot{\vec{H}} + M\dot{\vec{r}}_G' \times \vec{v}_{O'} + M\vec{r}_G' \times \dot{\vec{v}}_{O'} + \dot{\vec{K}}_{O' rot}$$

Deoarece $\dot{\vec{r}}_{O'} = \vec{v}_{O'}$, $\dot{\vec{r}}_G' = \vec{\omega} \times \vec{r}_G'$, $\dot{\vec{v}}_{O'} = \vec{a}_{O'}$, $\vec{v}_G = \vec{v}_{O'} + \vec{\omega} \times \vec{r}_G'$

se obține:

$$\dot{\vec{K}}_O = \vec{v}_{O'} \times M(\vec{v}_{O'} + \vec{\omega} \times \vec{r}_G') + \vec{r}_{O'} \times \dot{\vec{H}} + M(\vec{\omega} \times \vec{r}_G') \times \vec{v}_{O'} + M\vec{r}_G' \times \vec{a}_{O'} + \dot{\vec{K}}_{O' rot}$$

$$\dot{\vec{K}}_0 = \underbrace{\vec{v}_0 \times M\vec{v}_{01}}_{=0} + \cancel{M\vec{v}_0 \times (\vec{\omega} \times \vec{r}'_G)} + \vec{r}_{01} \times \dot{\vec{H}} + \cancel{M(\vec{\omega} \times \vec{r}'_G) \times \vec{v}_{01}} +$$

$$+ M\vec{r}'_G \times \vec{a}_{01} + \dot{\vec{K}}_{0'rot}$$

Rezultă

$$\boxed{\dot{\vec{K}}_0 = \vec{r}_{01} \times \dot{\vec{H}} + M\vec{r}'_G \times \vec{a}_{01} + \dot{\vec{K}}_{0'rot}}$$

Principiul momentului cinetic se scrie acum

$$\boxed{\vec{r}_{0'} \times \dot{\vec{H}} + M\vec{r}'_G \times \vec{a}_{01} + \dot{\vec{K}}_{0'rot} = \vec{M}_0}$$

<u>Teorema momentului cinetic în raport cu polul O' legat de corp</u>

Plecând de la principiul impulsului se poate demonstra teorema momentului cinetic în raport cu polul O' legat de corp.

Legea de modificare a vectorului moment rezultant la schimbarea polului este

$$\vec{M}_0 = \vec{M}_{01} + \vec{OO'} \times \vec{R} = \vec{M}_{01} + \vec{r}_{01} \times \vec{R}$$

Ținând cont de principiul impulsului $\dot{\vec{H}} = \vec{R}$ și de relația de mai sus, principiul momentului cinetic se scrie

$$\cancel{\vec{r}_{01} \times \vec{R}} + M\vec{r}'_G \times \vec{a}_{01} + \dot{\vec{K}}_{0'rot} = \vec{M}_{0'} + \cancel{\vec{r}_{01} \times \vec{R}}$$

Se obține teorema momentului cinetic

în raport cu polul O' legat de corp:

$$\boxed{M\vec{r}_G{}'\times\vec{a}_{O'}+\dot{\vec{K}}_{O'rot}=\vec{\mathcal{M}}_{O'}}$$

Dacă se alege polul O' chiar în centrul de masă G al corpului ($\vec{r}_G{}'=0$), atunci teorema capătă o formă mai simplă:

$$\boxed{\dot{\vec{K}}_{Grot}=\vec{\mathcal{M}}_G}$$

Derivata în raport cu timpul a momentului cinetic de rotație calculat în raport cu centrul de masă G al corpului este egală cu vectorul moment rezultant calculat în raport cu polul G.

Dacă vectorul moment rezultant este nul, atunci momentul cinetic calculat în raport cu același pol se conservă. De exemplu, dacă $\vec{\mathcal{M}}_G=0$ atunci

$$\vec{K}_G=\vec{K}_G^0=\overrightarrow{\text{constant}}.$$

Calculul derivatei momentului cinetic de rotație

Derivata în raport cu timpul a momentului cinetic de rotație se calculează astfel:

$$\dot{\vec{K}}_{O'rot}=(J'_{xx}\dot{\omega}'_x-J'_{xy}\dot{\omega}'_y-J'_{xz}\dot{\omega}'_z)\vec{i}'+(J'_{xx}\omega'_x+J'_{yy}\omega'_y+J'_{zz}\omega'_z)\dot{\vec{i}}'+(-J'_{xy}\dot{\omega}'_x+J'_{zz}\dot{\omega}'_y-J'_{yz}\dot{\omega}'_z)\vec{j}'+$$

$$(-J'_{yx}\omega'_x + J'_{yy}\omega'_y - J'_{yz}\omega'_z)\dot{\bar{j'}} + (-J'_{zx}\dot{\omega}'_x - J'_{zy}\dot{\omega}'_y + J'_{zz}\dot{\omega}'_z)\bar{k'} +$$

$$+ (-J'_{zx}\omega'_x - J'_{zy}\omega'_y + J'_{zz}\omega'_z)\dot{\bar{k'}}.$$

Pentru calculul derivatelor versorilor reperului mobil se folosesc formulele lui Poisson:

$$\dot{\bar{i'}} = \bar{\omega} \times \bar{i'}, \quad \dot{\bar{j'}} = \bar{\omega} \times \bar{j'}, \quad \dot{\bar{k'}} = \bar{\omega} \times \bar{k'}.$$

Expresia derivatei momentului cinetic de rotație devine

$$\dot{\vec{K}}'_{O' rot} = (J'_{xx}\dot{\omega}'_x - J'_{xy}\dot{\omega}'_y - J'_{xz}\dot{\omega}'_z)\bar{i'} +$$
$$+ (-J'_{yx}\dot{\omega}'_x + J'_{yy}\dot{\omega}'_y - J'_{yz}\dot{\omega}'_z)\bar{j'} +$$
$$+ (-J'_{zx}\dot{\omega}'_x - J'_{zy}\dot{\omega}'_y + J'_{zz}\dot{\omega}'_z)\vec{k'} +$$
$$+ \vec{\omega} \times (+J'_{xx}\omega'_x - J'_{xy}\omega'_y - J'_{xz}\omega'_z)\bar{i'} +$$
$$+ \bar{\omega} \times (-J'_{yx}\omega'_x + J'_{yy}\omega'_y - J'_{yz}\omega'_z)\bar{j'} +$$
$$+ \bar{\omega} \times (-J'_{zx}\omega'_x - J'_{zy}\omega'_y + J'_{zz}\omega'_z)\bar{k'}$$

sau încă

$$\dot{\vec{K}}_{O' rot} = (J'_{xx}\dot{\omega}'_x - J'_{xy}\dot{\omega}'_y - J'_{xz}\dot{\omega}'_z)\vec{i'} + (-J'_{yx}\dot{\omega}'_x + J'_{yy}\dot{\omega}'_y - J'_{yz}\dot{\omega}'_z)\vec{j'} +$$
$$+ (-J'_{zx}\dot{\omega}'_x - J'_{zy}\dot{\omega}'_y + J'_{zz}\dot{\omega}'_z)\vec{j'} + \ldots$$
$$+ \vec{\omega} \times [(J'_{xx}\omega'_x - J'_{xy}\omega'_y - J'_{xz}\omega'_z)\vec{i'} + (-J'_{yx}\omega'_x + J'_{yy}\omega'_y - J'_{yz}\omega'_z)\vec{j'} +$$
$$+ (-J'_{zx}\omega'_x - J'_{zy}\omega'_y + J'_{zz}\omega'_z)\vec{k'}]$$

Relația de mai sus se poate scrie într-o formă condensată

$$\boxed{\dot{\vec{K}}_{O'rot} = \frac{d}{dt}\left(\vec{K}_{O'rot}\right)_r + \vec{\omega} \times \vec{K}_{O'rot}}$$

unde

$\frac{d}{dt}\left(\vec{K}_{O'rot}\right)_r$ se numește derivata relativă a momentului cinetic de rotație, adică o derivată în care versorii $\bar{i}'$, $\bar{j}'$, $\bar{k}'$ nu se derivează ca și cum ar fi constanți.

Un caz particular important este acela în care vectorul $\vec{\omega}$ are direcție fixă în spațiu a axei Oz:

$$\vec{\omega} = \omega_z' \vec{k}' = \omega_z \vec{k} = \dot{\varphi} \vec{k} = \dot{\varphi} \bar{k}'$$

iar axa Oz' în jurul căreia se produce rotația este axă principală de inerție, deci $J'_{xz} = J'_{yz} = 0$. În acest caz momentul cinetic de rotație are cea mai simplă expresie

$$\vec{K}_{O'rot} = J'_{zz}\omega_z \bar{k}' = J'_{zz}\dot{\varphi}\bar{k}'$$

iar derivata lui este:

$$\dot{\vec{K}}_{O'rot} = J'_{zz}\dot{\omega}_z \bar{k}' = J'_{zz}\ddot{\varphi}\vec{k}' .$$

Teorema energiei cinetice

Am arătat că energia cinetică a solidului rigid are expresia

$$E = \frac{1}{2} M V_{01}^2 + M \vec{v}_{01} (\vec{\omega} \times \vec{r}_{s}^{\,\prime}) + E_{rot},$$

iar puterea unui sistem de forțe care acționează asupra acestui corp este:

$$\mathcal{P} = \vec{R}\,\vec{v}_{01} + \vec{M}_{01}\,\vec{\omega}$$

unde $\vec{R}$ și $\vec{M}_{01}$ sunt componentele torsorului sistemului ~~de~~ forțe care acționează asupra corpului calculat în polul O!

Teorema energiei afirmă că derivata în raport cu timpul a energiei cinetice a unui solid rigid este egală cu puterea sistemului de forțe care acționează asupra corpului:

$$\boxed{\dot{E} = \mathcal{P}}$$

Pentru a demonstra teorema, vom calcula puterea înlocuind $\vec{R}$ și $\vec{M}_{01}$ cu expresiile lor date de principiul impulsului și de teorema momentului cinetic în raport cu polul O, în expresia puterii.

$$P = M\vec{a}_G \cdot \vec{v}_{0'} + \left(M\vec{r}\,'_G \times \vec{a}_{0'} + \dot{\vec{K}}_{0'rot}\right)\vec{\omega}$$

Se înlocuiesc acum $\bar{a}_G$ și $\bar{K}_{0'rot}$ cu expresiile lor

$$\vec{a}_G = \vec{a}_{0'} + \vec{\varepsilon} \times \vec{r}\,'_G + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}\,'_G)$$

și

$$\dot{\vec{K}}_{0'rot} = \frac{d}{dt}\left(\vec{K}_{0'rot}\right)_r + \bar{\omega} \times \vec{K}_{0'rot}$$

$$P = M\vec{v}_{0'}\left[\vec{a}_{0'} + \vec{\varepsilon} \times \vec{r}\,'_G + \bar{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}\,'_G)\right] + \underbrace{\left(M\vec{r}\,'_G \times \vec{a}_{0'}\right)\cdot\vec{\omega}}_{\text{comutativ ciclic!}} +$$

$$+ \left[\frac{d}{dt}\left(\vec{K}_{0'rot}\right)_r + \bar{\omega} \times \vec{K}_{0'rot}\right]\cdot\vec{\omega} =$$

$$= M\vec{v}_{0'}\cdot\vec{a}_{0'} + M\vec{v}_{0'}(\vec{\varepsilon} \times \vec{r}\,'_G) + M\vec{v}_{0'}\left[\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}\,'_G)\right] + M\bar{a}_{0'}(\bar{\omega} \times \vec{r}\,'_G) +$$

$$+ \frac{d}{dt}\left(\vec{K}_{0'rot}\right)_r \cdot \vec{\omega} + \underbrace{\left(\vec{\omega} \times \vec{K}_{0'rot}\right)\vec{\omega}}_{=0} =$$

$$= \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}M\vec{v}_{0'}^{\,2} + M\vec{v}_{0'}(\vec{\omega} \times \vec{r}\,'_G) + E_{rot}\right]$$

Într-adevăr avem:

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}Mv_{0'}^2\right] = \frac{1}{2}M\,2\vec{v}_{0'}\,\bar{a}_{0'} = M\vec{v}_{0'}\cdot\bar{a}_{0'}$$

$$\frac{d}{dt}\left[M\vec{v}_{0'}(\vec{\omega} \times \vec{r}\,'_G)\right] = M\vec{a}_{0'}(\vec{\omega} \times \vec{r}\,'_G) + M\bar{v}_{0'}(\bar{\varepsilon} \times \vec{r}\,'_G) +$$
$$+ M\vec{v}_{0'}\left[\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}\,'_G)\right]$$

unde s-a folosit egalitatea $\dot{\vec{r}}\,'_G = \vec{\omega} \times \vec{r}\,'_G$.

$$\frac{d}{dt}\left[\vec{K}'_{O\,rot}\right]_r \cdot \vec{\omega} = \left[J'_{xx}\dot{\omega}'_x - J'_{xy}\dot{\omega}'_y - J'_{xz}\dot{\omega}'_z\right]\vec{i}\,' +$$

$$+\left[-J'_{yx}\dot{\omega}'_x + J'_{yy}\dot{\omega}'_y - J'_{yz}\dot{\omega}'_z\right]\vec{j}\,' + \left[-J'_{zx}\dot{\omega}'_x - J'_{zy}\dot{\omega}'_y + J'_{zz}\dot{\omega}'_z\right]\vec{k}\,'$$

$$\cdot\left(\omega'_x \bar{i}\,' + \omega'_y \bar{j}\,' + \omega'_z \bar{k}\,'\right) =$$

$$= J'_{xx}\dot{\omega}'_x\omega'_x - J'_{xy}\dot{\omega}'_y\omega'_x - J'_{xz}\dot{\omega}'_z\omega'_x -$$

$$- J'_{yx}\dot{\omega}'_x\omega'_y + J'_{yy}\dot{\omega}'_y\omega'_y - J'_{yz}\dot{\omega}'_z\omega'_y -$$

$$- J'_{zx}\dot{\omega}'_x\omega'_z - J'_{zy}\dot{\omega}'_y\omega'_z + J'_{zz}\dot{\omega}'_z\omega'_z =$$

$$= J'_{xx}\dot{\omega}'_x\omega'_x + J'_{yy}\dot{\omega}'_y\omega'_y + J'_{zz}\dot{\omega}'_z\omega'_z -$$

$$- J'_{xy}\dot{\omega}'_x\omega'_y - J'_{xy}\omega'_x\dot{\omega}'_y - J'_{xz}\dot{\omega}'_x\omega'_z - J'_{xz}\omega'_x\dot{\omega}'_z -$$

$$- J'_{zx}\dot{\omega}'_z\omega'_x - J'_{xz}\omega'_z\dot{\omega}'_x =$$

$$= \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}J'_{xx}{\omega'_x}^2 + \frac{1}{2}J'_{yy}{\omega'_y}^2 + \frac{1}{2}J'_{zz}{\omega'_z}^2 -\right.$$

$$\left.- J'_{xy}\omega'_x\omega'_y - J'_{yz}\omega'_y\omega'_z - J'_{zx}\omega'_z\omega'_x\right] = \dot{E}_{rot}$$

Reamintim că:

$$E_{rot} = \frac{1}{2}\left[J'_{xx}{\omega'_x}^2 + \frac{1}{2}J'_{yy}{\omega'_y}^2 + \frac{1}{2}J'_{zz}{\omega'_z}^2 -\right.$$

$$\left.-2J'_{xy}\omega'_x\omega'_y - 2J'_{yz}\omega'_y\omega'_z - 2J'_{xz}\omega'_x\omega'_z\right]$$

Teorema energiei cinetice sub formă diferenți-ală rezultă din teorema anterioară scrisă sub forma

$$\frac{dE}{dt} = P$$

de unde rezultă

$$dE = P dt$$

Am arătat că lucrul mecanic elementar este

$$d\mathcal{L} = P dt$$

și rezultă teorema energiei cinetice sub formă diferențială:

$$\boxed{dE = d\mathcal{L}}$$

Diferențiala energiei cinetice a unui solid rigid este egală cu lucrul mecanic ele-mentar al forțelor care acționează asupra corpului.

Dacă se integrează relația de mai sus, se obține o altă formă a teoremei energiei cinetice

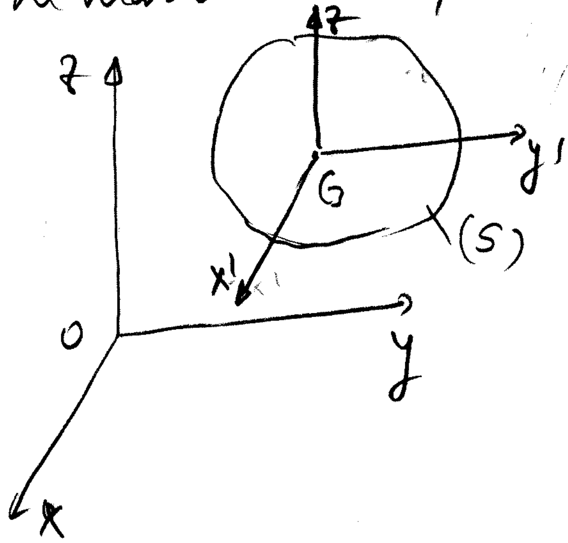
$$\boxed{E - E_0 = \mathcal{L}}$$

Variația energiei cinetice este egală cu lucrul mecanic al forțelor ce acționează asupra corpului.

Dinamica unor mișcări particulare ale solidului rigid

Dinamica mișcării de translație a a solidului rigid

Se consideră un solid rigid de masă M care execută o mișcare de translație sub acțiunea unui sistem de forțe având torsorul în centrul de masă G al corpului $\{\vec{R}, \vec{M}_G\}$. Reperul fix



$R(O, \bar{i}, \bar{j}, \bar{k})$ și reperul mobil $R'(G, \bar{i'}, \bar{j'}, \bar{k'})$ au axele paralele. Elementul caracteristic al acestei mișcări este faptul că $\vec{\omega} = 0$.

Impulsul, momentul cinetic, puterea și lucrul mecanic au expresiile

$$\vec{H} = M\vec{v}_G, \quad \vec{K}_O = \vec{r}_G \times \vec{H}, \quad P = M\vec{v}_G, \quad d\mathcal{L} = \vec{F}d\vec{r}_G$$

Deoarece $\vec{\omega} = 0$ $\quad K_{G\,rot} = 0$. $E = \frac{1}{2}MV_G^2 \quad (\vec{r}_G' = 0)$

Ecuațiile de mișcare rezultate din principiul impulsului și teorema momentului cinetic în raport cu centrul de masă G sunt

$$\begin{cases} M\vec{a}_G = \vec{R} \\ 0 = \vec{\mathcal{M}}_G \end{cases}$$

Ecuațiile scalare de mișcare sunt

$$M\ddot{x}_G = R_x \qquad 0 = \mathcal{M}_{Gx}$$

$$M\ddot{y}_G = R_y \qquad 0 = \mathcal{M}_{Gy}$$

$$M\ddot{z}_G = R_z \qquad 0 = \mathcal{M}_{Gz}$$

Pentru a putea fi integrate, sistemul se completează cu condițiile inițiale

$$x_G(0) = x_G^0 \qquad \dot{x}_G(0) = V_{Gx}^0$$

$$y_G(0) = y_G^0 \qquad \dot{y}_G(0) = V_{Gy}^0$$

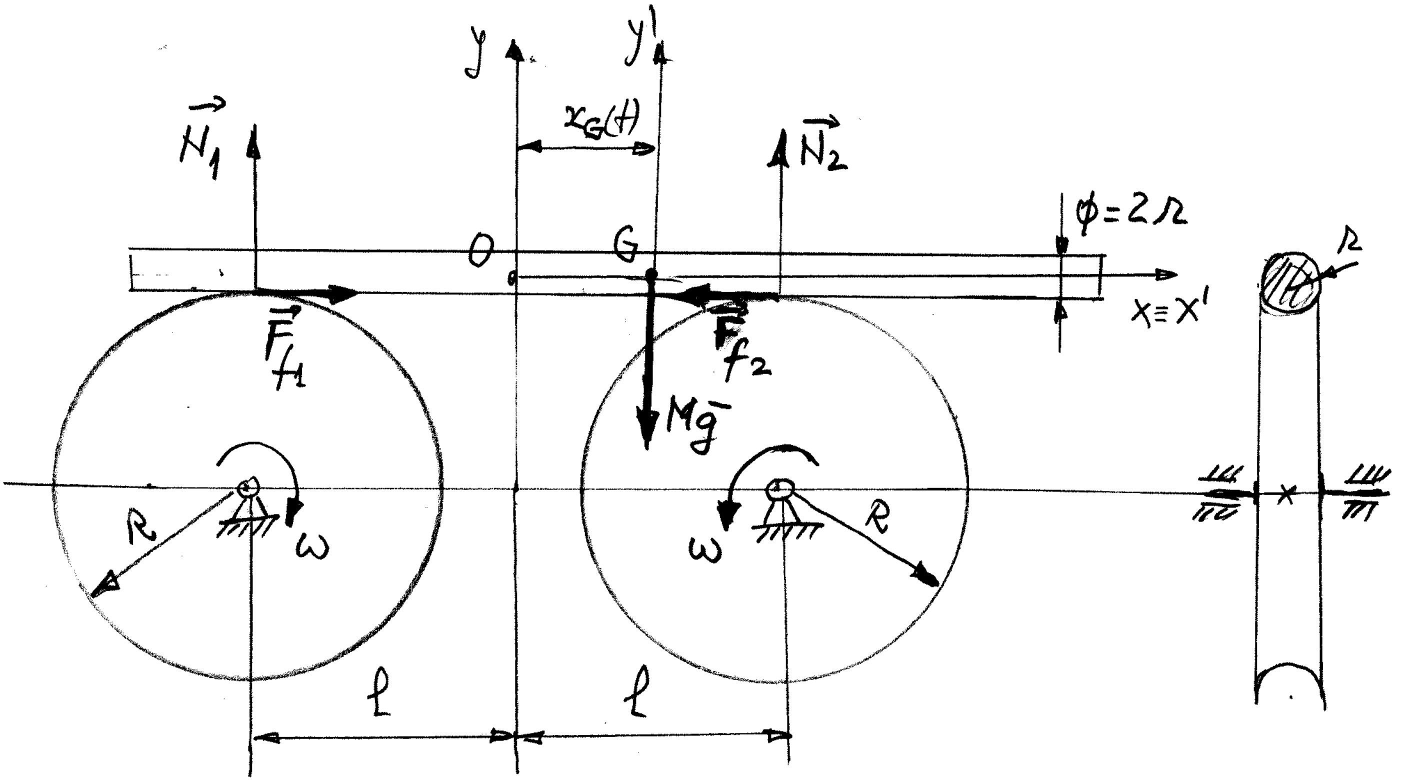
$$z_G(0) = z_G^0 \qquad \dot{z}_G(0) = V_{Gz}^0$$

Observație. Faptul că $\vec{\mathcal{M}}_G = 0$ înseamnă că sistemul de forțe care acționează asupra corpului se reduce la un vector unic cu suportul trecând prin centrul de masă G al corpului.

Dacă corpul este supus la legături, atunci numărul parametrilor de poziție independenți este mai mic decât 3 dar apar ca necunoscute reacțiunile legăturilor și sistemul de ecuații se îmbogățește cu ecuațiile de legătură.

Exemplu. Se consideră o bară cilindrică de masă M așezată excentric pe două role identice de rază R care se rotesc în sensuri opuse cu aceeași viteză unghiulară constantă ω_0. Distanța ~~între centrele rolelor este 2l.~~ Între role și bară apare o forță de frecare de alunecare, coeficientul de frecare de alunecare fiind μ.

Rolele au pe circumferință un canal semicircular de rază r în care este așezată bara cilindrică tot de rază r.



În punctele de contact dintre bară și role apar forțele de frecare $\vec{F}_{f1}$ și $\vec{F}_{f2}$ care acționează asupra barei, al căror sens este opus rotației rolelor. Ele acționează asupra barei ca forțe care produc mișcarea acesteia. De asemenea, în punctele de contact apar forțele de reacțiune $\vec{N}_1$ și $\vec{N}_2$ din cele două reazeme. Bara este așezată pe role astfel încât centrul ei de masă este așezat la distanța x_G^0 față de mijlocul distanței dintre centrele rolelor. Deoarece se produce alunecare între role și bară, forțele de frecare au valoarea maximă

$$|\vec{F}_{f1}| = \mu |\vec{N}_1| \quad \text{și} \quad |\vec{F}_{f2}| = \mu |\vec{N}_2|.$$

Întrucât bara nu este așezată centric, cele două reacțiuni normale nu sînt egale, mai mare fiind cea apropiată de centrul de masă G. În consecință, bara va fi împinsă de forța de frecare mai mare (de aceea bara se așează inițial excentric) către mijlocul distanței dintre role. În acest timp scade forța de frecare care împinge bara și crește forța de frecare din punctul de contact cu cealaltă rolă. Mișcarea se va opri când aceasta din urmă ajunge la o valoare suficient de mare încât să învingă prima forță de frecare. Din acest moment mișcarea se reia în sens invers, astfel că bara va executa o mișcare oscilatorie de translație în lungul ei.

Pentru studierea mișcării se aleg două repere. Un reper fix Oxy cu polul O situat la distanță egală cu l de centrele rolelor și axa Ox în lungul barei. Axa Ox coincide ~~cu axa de~~ simetrie a barei iar axa Oy este perpendiculară pe ea și coincide cu axa de simetrie a aparatului. Un reper mobil având polul în centrul de masă G al barcii și cu axele Gx' și Gy' paralele cu ale reperului fix (axa Gx' chiar coincide cu axa Ox).

Ecuațiile vectoriale de mișcare sunt:

$$\begin{cases} M\vec{a}_G = \vec{R} \\ 0 = \vec{M}_G \end{cases} \quad \text{unde} \begin{cases} \vec{R} = \vec{F}_{f1} + \vec{F}_{f2} + \vec{N}_1 + \vec{N}_2 + M\vec{g} \\ \vec{M}_G = \vec{M}_G(\vec{F}_{f1}) + \vec{M}_G(\vec{F}_{f2}) + \vec{M}_G(\vec{N}_1) + \vec{M}_G(\vec{N}_2) \end{cases}$$

Ecuațiile scalare de mișcare sunt:

$$① \; M\ddot{x}_G = F_{f1} - F_{f2} \qquad 0 = 0$$

$$② \; M\ddot{y}_G = N_1 + N_2 - Mg \qquad 0 = 0$$

$$M\ddot{z}_G = 0 \qquad ③ \; 0 = F_{f1}\cdot R - F_{f2}\cdot R - N_1(l + x_G) + N_2(l - x_G)$$

(corpul nu se mișcă în lungul axei Oz)

Necunoscutele sunt N_1, N_2, x_G și y_G.

Faptul că ④ $y_G = 0$ pe toată durata mișcării reprezintă o ecuație de legătură. Prin urmare avem 4 necunoscute și 4 ecuații numerotate de la 1 la 4.

Deoarece $y_G = 0$ rezultă $\ddot{y}_G = 0$, deci rămân trei ecuații și trei necunoscute:

$$① \; M\ddot{x}_G = \mu N_1 - \mu N_2$$

$$② \; 0 = N_1 + N_2 - Mg$$

$$③ \; 0 = \mu N_1 R - \mu N_2 R - N_1 l - N_1 \cdot x_G + N_2 \cdot l - N_2 x_G$$

Din prima ecuație rezultă

$$N_1 - N_2 = \frac{1}{\mu} M\ddot{x}_G.$$

Din a doua ecuație rezultă

$$N_1 + N_2 = Mg$$

A treia ecuație se scrie

$$0 = \mu r(N_1 - N_2) - \ell(N_1 - N_2) - x_G(N_1 + N_2)$$

Se înlocuiesc $N_1 - N_2$ și $N_1 + N_2$ cu expresiile calculate și se obține:

$$0 = \mu r \frac{\cancel{M}\ddot{x}_G}{\cancel{\mu}} - \ell \frac{\cancel{M}\ddot{x}_G}{\mu} - x_G \cdot \cancel{M}g$$

care se scrie

$$\ddot{x}_G + \frac{\mu g}{\ell - \mu r} x_G = 0$$

Aceasta este o ecuație diferențială, liniară, omogenă cu coeficienți constanți. Rădăcinile ecuației caracteristice

$$\alpha^2 + \frac{\mu g}{\ell - \mu r} = 0 \Rightarrow \alpha^2 = -\frac{\mu g}{\ell - \mu r}$$

sunt

$$\alpha_{1,2} = \pm i\sqrt{\frac{\mu g}{\ell - \mu r}}$$ cu condiția, în general îndeplinită în realitate, $\ell > \mu r$.

Soluția acestei ecuații diferențiale este:

$$x_G = C_1 \sin\left(\sqrt{\frac{\mu g}{\ell - \mu r}}\, t\right) + C_2 \cos\left(\sqrt{\frac{\mu g}{\ell - \mu r}}\, t\right)$$

Pentru a determina cele două constante C_1 și C_2, impunem condiția ca această soluție să fie verificată de condițiile inițiale. Condițiile inițiale sunt $x_G(0)=x_G^0$ (distanța dintre polul o și centrul de masă G în momentul așezării barei pe role) și $\dot{x}_G(0)=0$ care arată că bara este așezată cu viteză inițială nulă în poziția precizată.

Derivăm soluția:

$$\dot{x}_G = +C_1\sqrt{\frac{\mu g}{l-\mu r}}\cdot\cos\sqrt{\frac{\mu g}{l-\mu r}} - C_2\sqrt{\frac{\mu g}{l-\mu R}}\cdot\sin\left(\sqrt{\frac{\mu g}{l-\mu r}}\,t\right)$$

Pentru $t=0$ $x_G(0)=x_G^0$ și $\dot{x}_G(0)=0$, se obțin valorile celor două constante de integrare:

$$x_G^0 = C_2$$

$$0 = C_1\sqrt{\frac{\mu g}{l-\mu r}} \Rightarrow C_1=0$$

Legea de mișcare a centrului de masă G

este

$$x_G(t)= x_G^0\cos\left(\sqrt{\frac{\mu g}{l-\mu r}}\,t\right)$$

adică o mișcare rectilinie oscilatorie armonică cosinusoidală având amplitudinea egală cu poziția inițială a centrului de masă și perioada

$$T= \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{\mu g}{l-\mu R}}}\ [s]$$

Dacă se măsoară perioada oscilației, atunci se poate determina coeficientul de frecare de alunecare dintre bară și discuri care are expresia

$$\mu = \frac{4\pi^2 l}{4\pi^2 r + T^2 g}$$

Observație: Dacă $l < \mu r$ atunci ecuația caracteristică are două soluții reale

$$\alpha_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{\mu g}{\mu r - l}}$$

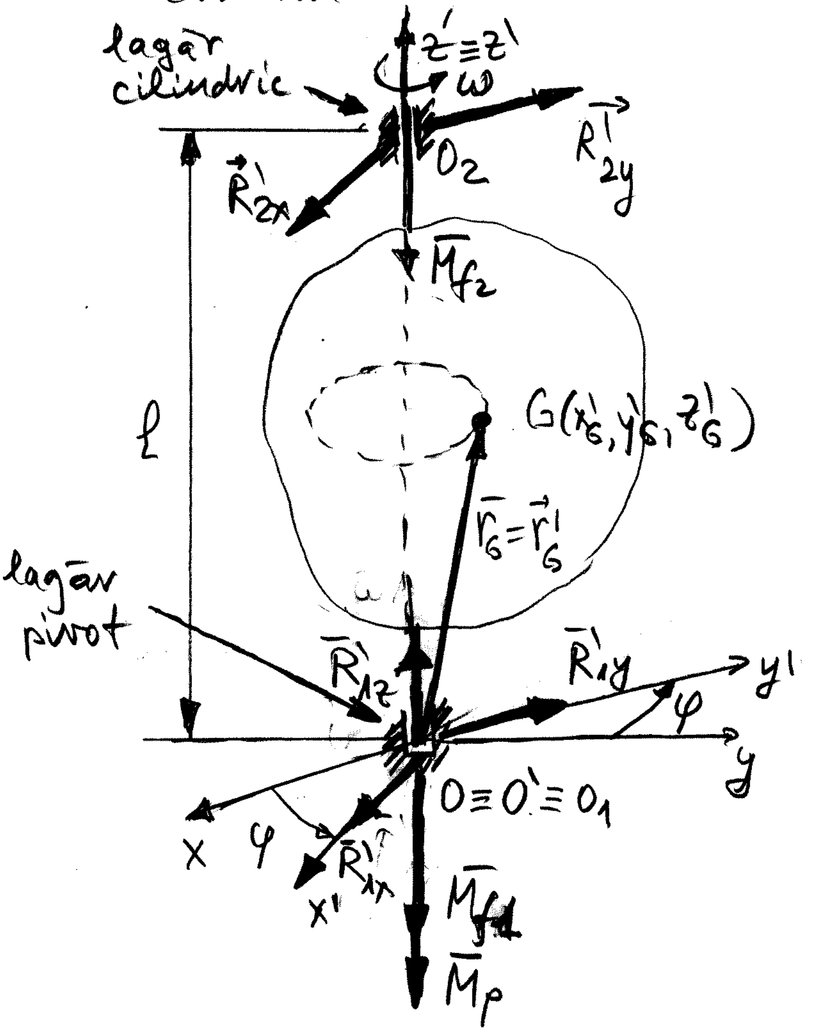
iar soluția ecuației diferențiale este

$$x_G = C_1 e^{-\sqrt{\frac{\mu g}{\mu r - l}}\,t} + C_2 e^{\sqrt{\frac{\mu g}{\mu r - l}}\,t}$$

în care primul termen tinde la zero iar cel de al doilea la infinit. Acest fapt arată că forța de frecare este atât de mare încât aruncă bara de pe role, iar mișcarea oscilatorie nu mai are loc.

Dinamica mişcării de rotaţie în jurul unei axe fixe

Se consideră un solid rigid de masă M în mişcare de rotaţie în jurul unei axe fixe care nu conţine centrul de masă G al corpului.



Reperele se aleg ca la studiul cinematicii acestei mişcări. Se consideră că asupra corpului acţionează un sistem de forţe care are torsorul în polul $O \equiv O'$ $\{\bar{R}, \bar{M}_{O'}\}$. Impulsul, momentul cinetic, energia cinetică, puterea şi lucrul mecanic au expresiile

$$\bar{H} = M\bar{v}_G,$$

$$\vec{K}_O = \bar{r}_{O'} \times \vec{H}' + \vec{K}_{O'} = \vec{r}_{O'} \times \vec{H}' + M\vec{r}'_G \times \vec{v}_{O'} + \bar{K}_{O'rot} \text{ şi}$$

rezultă $\vec{K}_O = \vec{K}_{O'} = \vec{K}_{O'rot}$ deoarece $\vec{r}_{O'} = 0$ şi $\vec{v}_{O'} = 0$

$$E = \frac{1}{2}Mv_{O'}^2 + M\vec{v}_{O'}(\vec{\omega}' \times \vec{r}'_G) + E_{rot} = E_{rot}.$$ Deoarece

$\bar{\omega} = \omega_z \bar{k} = \omega'_z \bar{k}' = \dot{\varphi}\bar{k} = \dot{\varphi}\bar{k}'$, rezultă că $E_{rot} = \frac{1}{2}J'_{zz}\omega^2 =$

$$= \frac{1}{2}J'_{zz}\dot{\varphi}^2.$$

$P = \vec{R} \cdot \vec{v}_{O1} + \vec{M}_{O1} \vec{\omega} = \vec{M}_{O1} \cdot \vec{\omega}$

$d\mathcal{L} = P\,dt = \vec{M}_{O1} \vec{\omega}\, dt$

Sistemul de forțe care acționează asupra corpului include, pe lângă forțele date având resultanta $\vec{R} = R'_x \vec{i} + R'_y \vec{j} + R'_z \vec{k}$, forțele de reacțiune ale legăturilor adică cele din lagăre:

$$\vec{R}_1 = R'_{1x} \vec{i} + R'_{1y} \vec{j} + R'_{1z} \vec{k},$$

$$\vec{R}_2 = R'_{2x} \vec{i} + R'_{2y} \vec{j}.$$

Momentul resultant al forțelor date în polul O' este $\vec{M}_{O1} = M'_{Ox} \vec{i} + M'_{Oy} \vec{j} + M'_{Oz} \vec{k}$. În lagăre apar trei momente de frecare și anume:

1. în lagărul pivot este un moment de frecare datorat părții cilindrice $\vec{M}_{f1}$ și un moment datorat frecării de pivotare $\vec{M}_p$, ambele opunându-se mișcării de rotație;
2. în lagărul cilindric din partea de sus apare un moment de frecare $\vec{M}_{f2}$ care se opune și el mișcării de rotație.

Distanța dintre lagăre este l.

La suma momentelor trebuie adăugate momentele forțelor de reacțiune din lagărul cilindric din partea de sus.

Ecuațiile vectoriale de mișcare sunt:

$$M\vec{a}_G = \bar{R} + \bar{R}_1 + \bar{R}_2$$

$$\dot{\vec{K}}_{O1} = \vec{M}_{O1} + \vec{M}_{f1} + \vec{M}_{f2} + \vec{M}_p + \vec{M}_O(\bar{R}_2)$$

Pentru a scrie ecuațiile scalare de mișcare, trebuie calculate $\bar{a}_G$ și $\dot{\bar{K}}_{O'rot}$.

$$\bar{a}_G = \underset{0}{\bar{a}_{O1}} + \bar{\varepsilon} \times \bar{r}'_G + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}'_G) = \begin{vmatrix} \bar{i}' & \bar{j}' & \bar{k}' \\ 0 & 0 & \ddot{\varphi} \\ x'_G & y'_G & 0 \end{vmatrix} +$$

$$\bar{\varepsilon} = \dot{\bar{\omega}} = \ddot{\varphi}\bar{k} = \ddot{\varphi}\bar{k}'$$

$$+ \bar{\omega} \times \begin{vmatrix} \bar{i}' & \bar{j}' & \bar{k}' \\ 0 & 0 & \dot{\varphi} \\ x'_G & y'_G & z'_G \end{vmatrix} = -y'_G\ddot{\varphi}\,\bar{i}' + x'_G\ddot{\varphi}\,\bar{j}' + \begin{vmatrix} \bar{i}' & \bar{j}' & \bar{k}' \\ 0 & 0 & \dot{\varphi} \\ -y'_G\dot{\varphi} & x'_G\dot{\varphi} & 0 \end{vmatrix} =$$

$$\boxed{\bar{a}_G = (-x'_G\dot{\varphi}^2 - y'_G\ddot{\varphi})\,\bar{i}' + (x'_G\ddot{\varphi} - y'_G\dot{\varphi}^2)\,\bar{j}'}$$

$$\bar{K}_{O'rot} = -J'_{xz}\dot{\varphi}\,\vec{i}' - J'_{yz}\dot{\varphi}\,\vec{j}' + J'_{zz}\dot{\varphi}\,\vec{k}'$$

$$\dot{\vec{K}}_{O'rot} = \frac{d}{dt}\left(\vec{K}_{O'rot}\right)_R + \vec{\omega} \times \vec{K}_{O'rot}$$

$$\dot{\vec{K}}_{O'rot} = -J'_{xz}\ddot{\varphi}\,\bar{i}' - J'_{yz}\ddot{\varphi}\,\bar{j}' + J'_{zz}\ddot{\varphi}\,\vec{k}' + \begin{vmatrix} \bar{i}' & \bar{j}' & \bar{k}' \\ 0 & 0 & \dot{\varphi} \\ -J'_{xz}\dot{\varphi} & -J'_{yz}\dot{\varphi} & +J'_{zz}\dot{\varphi} \end{vmatrix}$$

$$\boxed{\dot{\bar{K}}_{O'rot} = (-J'_{xz}\ddot{\varphi} + J'_{yz}\dot{\varphi}^2)\,\bar{i}' + (-J'_{yz}\ddot{\varphi} - J_{xz}\dot{\varphi}^2)\,\bar{j}' + J'_{zz}\ddot{\varphi}\,\bar{k}'}$$

$$\vec{M}_{O1}(\vec{R}_2) = \vec{r}_{O2} \times \bar{R}_2 = \begin{vmatrix} \bar{i}' & \bar{j}' & \bar{k}' \\ 0 & 0 & l \\ R'_{2x} & R'_{2y} & 0 \end{vmatrix} = -R_{2y}\,l\,\bar{i}' + R'_{2x}\,l\,\bar{j}'$$

Se pot scrie acum ecuațiile scalare de mișcare

① $M(-x'_G\dot{\varphi}^2 - y'_G\ddot{\varphi}) = R'_{1x} + R'_{2x} + R'_x$

② $M(x'_G\ddot{\varphi} - y'_G\dot{\varphi}^2) = R'_{1y} + R'_{2y} + R'_y$

③ $0 = R'_{1z} + R'_z$

④ $-J'_{xz}\ddot{\varphi} + J'_{yz}\dot{\varphi}^2 = -R'_{2y}l + M'_{O_x}$

⑤ $-J'_{yz}\ddot{\varphi} - J'_{xz}\dot{\varphi}^2 = R'_{2x}l + M'_{O_y}$

⑥ $J'_{zz}\ddot{\varphi} = M_{O_z} - M_{f_1} - M_{f_2} - M_p$ cu $\varphi(0) = \varphi_0$ și $\dot{\varphi}(0) = \omega_0$

Ecuația numărul 6 se numește ecuația fundamentală a mișcării de rotație în jurul unei axe fixe. Prin integrare (când această operație este posibilă) se obține legea de variație $\varphi = \varphi(t)$. Apoi se poate rezolva sistemul format din primele cinci ecuații obținându-se cele cinci forțe de legătură R'_{1x}, R'_{1y}, R'_{1z}, R'_{2x} și R'_{2y}. Ele sunt necesare la proiectarea lagărelor.

Observație. Dacă momentele de frecare depind de reacțiuni, atunci ecuația ⑥ este foarte dificil de integrat, de cele mai multe ori chiar imposibil. De regulă momentele de frecare se aproximează cu o valoare constantă sau chiar se neglijează.

Echilibrarea rotorilor

Ecuațiile 1, 2, 4 și 5 ale dinamicii solidului rigid în mișcare de rotație înjurul unei axe fixe (așa numitul rotor) arată că forțele de legătură R'_{1x}, R'_{1y}, R'_{2x} și R'_{2y} depind de pătratul vitezei unghiulare. În cazul unor mișcări cu viteze unghiulare mari, aceste forțe capătă valori apreciabile și creează probleme atât durabilității lagărelor cât și funcționării normale deoarece se generează vibrații extrem de dăunătoare care pun în pericol funcționarea rotorului. Evitarea acestor fenomene nedorite se poate face dacă reacțiunile nu ar depinde de pătratul vitezei unghiulare, adică ar avea valori constante, ca la statică. Sistemul de ecuații ar trebui să arate astfel:

$$0 = R'_x + R'^0_{1x} + R'^0_{2x}$$

$$0 = R'_y + R'^0_{1y} + R'^0_{2y}$$

$$0 = -l R'^0_{2y} + M'^0_{0x}$$

$$0 = l R'^0_{2x} + M'^0_{0y}$$

unde R'^0_{1x}, R'^0_{1y}, R'^0_{2x} și R'^0_{2y} notează valorile reacțiunilor când corpul nu se mișcă, adică reacțiunile dinamice sunt egale cu reacțiunile statice.

Problema aceasta se numește problema echilibrării rotorilor. Dacă se impun condițiile de mai sus în ecuațiile dinamicii rezultă că trebuie îndeplinite două condiții:

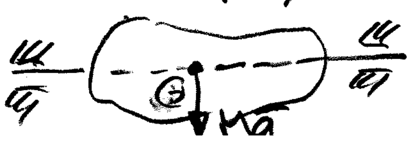
$$(1)\begin{cases} -x'_G\dot{\varphi}^2 - y'_G\ddot{\varphi} = 0 \\ x'_G\ddot{\varphi} - y'_G\dot{\varphi}^2 = 0 \end{cases}$$

Această condiție trebuie îndeplinită pentru orice viteză unghiulară ceea ce se întâmplă dacă

$$\begin{cases} x'_G = 0 \\ y'_G = 0 \end{cases}$$

adică centrul de masă al corpului se află pe axa de rotație a corpului. Atunci când este îndeplinită această condiție, se spune că rotorul este echilibrat static.

Denumirea provine de la faptul că, dacă așezăm corpul în orice poziție orizontală, el nu se va roti din cauza momentului forței de greutate în raport cu axa de rotație



(2) $$\begin{cases} -J'_{xz}\ddot{\varphi} + J'_{yz}\dot{\varphi}^2 = 0 \\ -J'_{yz}\dot{\varphi}^2 - J'_{xz}\ddot{\varphi} = 0 \end{cases}$$

Această condiție trebuie îndeplinită pentru orice viteză unghiulară ceea ce se întâmplă dacă:

$$\begin{cases} J'_{xz} = 0 \\ J'_{yz} = 0. \end{cases}$$

adică axa de rotație este axă principală de inerție. Atunci când este îndeplinită această condiție se spune că rotorul este echilibrat dinamic. Denumirea provine de la faptul că neîndeplinirea ei se manifestă numai în dinamica corpului, adică în casul când acesta se mișcă, prin apariția unor forțe apreciabile în lagăre.

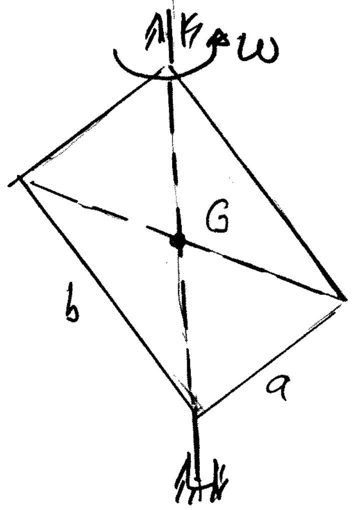
În concluzie, un rotor trebuie să fie echilibrat static și dinamic pentru a nu apărea probleme în funcționare.

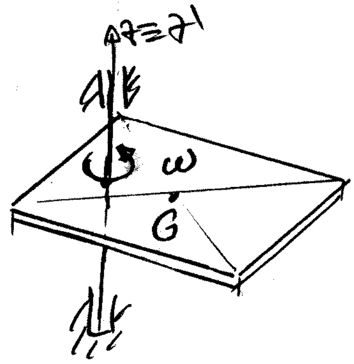
Echilibrarea se execută pe mașini de echilibrat și este o operație ce trebuie să existe în fișa tehnologică a oricărei piese în mișcare de rotație (rotor).

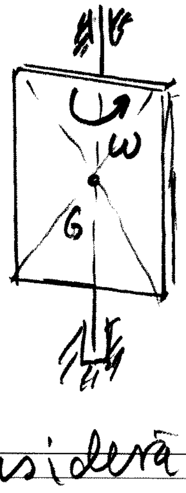
Exemple

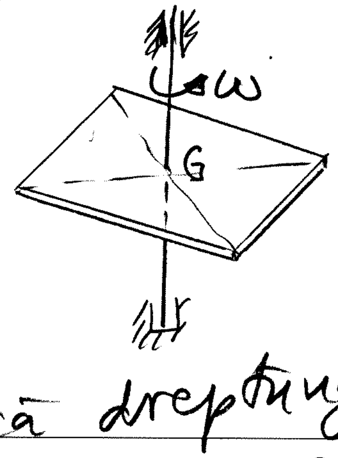
① Se consideră o placă dreptunghiulară care se rotește în jurul unei diagonale. El este echilibrat static dar nu și dinamic. Același dreptunghi rotit în jurul unei axe perpendiculare pe planul său care nu trece prin centrul de masă este echilibrat dinamic dar nu și static ($J_{xz}=J_{yz}=0$)

Primul rotor este echilibrat static și dinamic dacă se rotește în jurul unei axe de simetrie iar cel de al doilea dacă se rotește în jurul unei axe care trece prin centrul de masă al corpului.

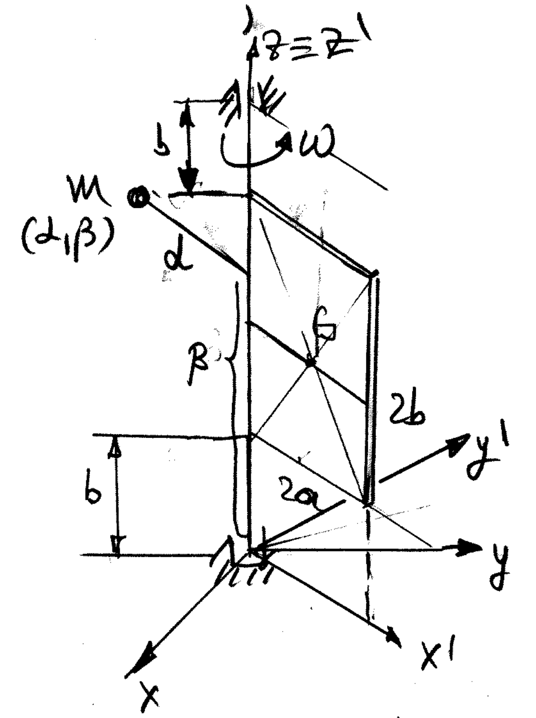








② Se consideră o placă dreptunghiulară de masă M și dimensiuni 2a și 2b care se rotește în jurul unei axe ce coincide cu latura de lungime 2b. ca in desen. Se cere să se determine mărimea și poziția unei mase m așezată în planul plăcii care să asigure echilibrarea statică și dinamică a rotorului.



Se calculează mai întâi momentele de inerție J'_{xz} și J'_{yz} ale plăcii:

$$J'_{xz} = 0 + M x'_G z'_G = M\,2ab$$

$$J'_{yz} = 0$$

Coordonatele centrului de masă al plăcii împreună cu masa m sunt

$$\begin{cases} x'_G = \dfrac{Ma - m\alpha}{M+m} \\ y'_G = 0 \end{cases}$$

Pentru ca ansamblul să fie echilibrat static trebuie ca

$$x'_G = 0 \Rightarrow \boxed{\alpha = \frac{Ma}{m}}$$

Momentul de inerție J'_{xz} al ansamblului este

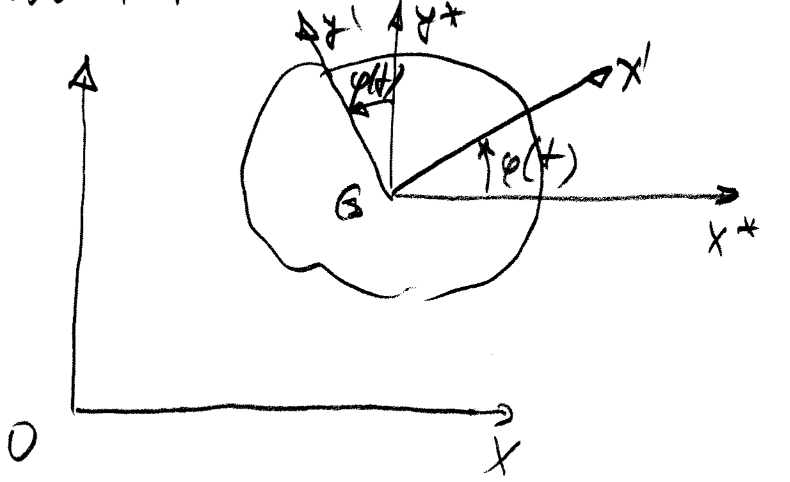
$$J'_{yz} = M \cdot 2ab - m\alpha\beta .$$

Pentru ca ansamblul să fie echilibrat dinamic trebuie ca

$$J'_{yz} = 0 \Rightarrow M\,2ab - m \cdot \frac{Ma}{m}\beta = 0 \Rightarrow \boxed{\beta = 2b}$$

Dinamica mișcării plan paralele a solidului rigid

Se consideră un solid rigid (S) care execută o mișcare plan-paralelă. Asupra corpului acționează un sistem de forțe care are torsorul în centrul de masă G $\{\bar{R}, \vec{M}_G\}$



Reperele se aleg și în cazul rezolvării problemei de cinematică cu precizarea că reperul mobil are polul în centrul de masă G situat în planul director care este considerat și plan de simetrie materială al corpului. În aceste condiții axa Gz' este axă principală centrală de inerție, prin urmare

$$J'_{xz} = 0 \text{ și } J'_{yz} = 0.$$

Impulsul, momentul cinetic în polul G, energia cinetică, puterea și lucrul mecanic sunt:

$$\vec{H} = M\vec{V}_G$$

$$\vec{K}_G = M\underbrace{\vec{r}_G'}_{=0}\times\vec{v}_{0'} + \vec{K}_{G\,rot} = \vec{K}_{G\,rot} = J'_{zz}\dot{\varphi}\vec{k}'$$

deoarece $\vec{\omega} = \dot{\varphi}\vec{k} = \dot{\varphi}\vec{k}'$ iar axa Gz' este axă principală centrală de inerție!

$$E_c = \frac{1}{2}M\vec{v}_G^{\,2} + \frac{1}{2}J'_{zz}\dot{\varphi}^2$$

$$P = \vec{R}\cdot\vec{v}_G + \vec{M}_G\cdot\vec{\omega}$$

$$d\mathcal{L} = P\,dt = (\vec{R}\,\vec{v}_G + \vec{M}_G\cdot\vec{\omega})\,dt$$

Ecuațiile vectoriale de mișcare sunt:

$$M\vec{a}_G = \vec{R}$$

$$\dot{\vec{K}}_{G\,rot} = \vec{M}_G$$

Ecuațiile scalare de mișcare se obțin prin proiectarea primei ecuații pe axele reperului fix și celei de a doua pe axele reperului mobil.

$$M\ddot{x}_G = R_x \qquad 0 = M_{Gx}$$

$$M\ddot{y}_G = R_y \qquad 0 = M_{Gy}$$

$$0 = R_z \qquad J'_{zz}\ddot{\varphi} = M_{Gz}$$

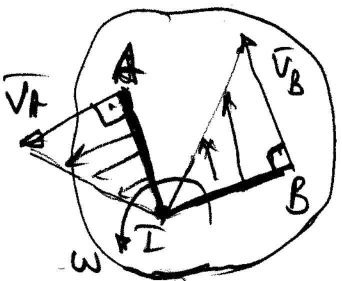
La aceste ecuații se adaugă condițiile inițiale

$$x_G(0) = x_G^0 \quad y_G^0 = y_G^0 \quad \varphi(0) = \varphi_0$$

$$\dot{x}_G(0) = v_{Gx}^0 \quad \dot{y}_G(0) = v_{Gy}^0 \quad \dot{\varphi}(0) = \omega_0.$$

De regulă corpul este supus la legături astfel că, în ecuații, apar ca necunoscute și reacțiunile legăturilor iar sistemul de ecuații se completează cu ecuațiile de legătură.

În problemele mișcării plan paralele este adesea implicat centrul instantaneu de rotație I. Acesta este un punct care are la un moment dat viteza zero și, pe rând, diverse puncte ale corpului joacă rolul lui I. Dacă I este luat ca pol, distribuția vitezelor punctelor din planul director este ca și cum corpul s-ar roti instantaneu în jurul lui I.



Dacă A este un punct al corpului, $\vec{\omega}$ este viteza unghiulară și I centrul instantaneu de rotație, atunci au loc următoarele proprietăți:

1) $|\bar{V}_A| = |\omega| \cdot |\bar{IA}|$

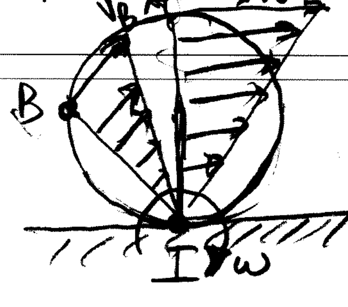
2) $\bar{V}_A \perp \bar{IA}$

Obs. I se găsește la intersecția perpendicularelor pe direcțiile vitezelor a două puncte ale corpului.

3) sensul lui $\vec{V}_A$ concordă cu sensul lui $\vec{\omega}$

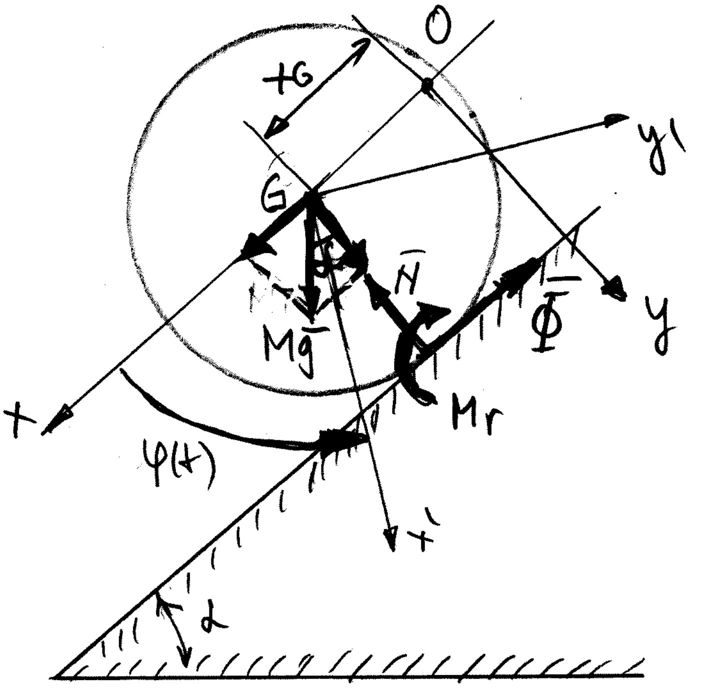
4) vârfurile vectorilor viteză ai punctelor segmentului IA sunt coliniare.

Exemple ① Un disc se rostogolește pur pe o dreaptă fixă și are viteza unghiulară ω. I este punctul de contact dintre disc și sol. $|V_A| = |\omega| \cdot 2R$ und R este raza discului ($\vec{V}_A \perp \vec{IA}$), $|\bar{V}_B| = |\omega| \cdot |\bar{IB}|$.



(2) Un disc de rază R și masă M se rostogolește pur pe un plan înclinat asupra, coeficientul de frecare de rostogolire fiind s[m]. Discul este lăsat liber să se rostogolească către baza planului înclinat de unghi α. Să se studieze mișcarea discului. La momentul inițial t=0,

$x(0)=0 \quad \dot{x}(0)=0 \quad \varphi(0)=0 \quad \dot{\varphi}(0)=0$



Ecuațiile vectoriale de mișcare sunt

$$M\vec{a}_G = M\bar{g} + \vec{\phi} + \vec{N}$$

$$\dot{\bar{K}}_{G\,rot} = M_0(\vec{\Phi}) + \vec{M}_r$$

Ecuațiile scalare de echilibru sunt:

$$M\ddot{x}_G = Mg\sin\alpha - \Phi$$

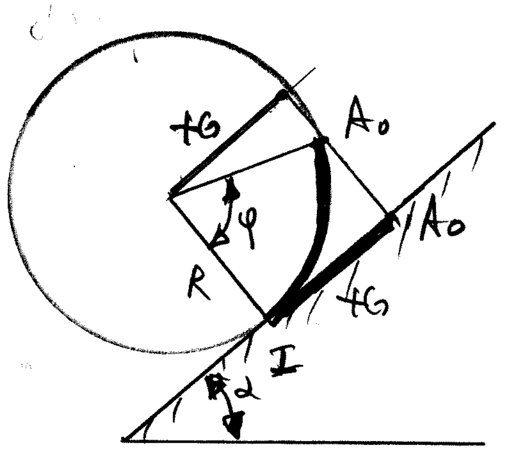
$$M\ddot{y}_G = -N + Mg\cos\alpha$$

$$J_{zz}\ddot{\varphi} = \phi R - M_r$$

Deoarece are loc o rostogolire pură, forța de frecare $\vec{\phi}$ nu își atinge valoarea maximă $\mu|\vec{N}|$ ci are o valoare necunoscută cuprinsă între zero și valoarea maximă. Momentul de frecare de rostogolire $\vec{M}_r$ are valoarea maximă $s|\vec{N}|$.

În sistemul de ecuații sunt cinci necunoscute: x_G, y_G, φ, N și Φ dar sunt numai trei ecuații. A patra ecuație este ecuația de legătură

$y_G = 0$ dată de faptul că polul G se găsește întotdeauna pe axa Ox, adică la distanța R de planul înclinat. A cincea ecuație rezultă din faptul că are loc o rostogolire pură, deci $x_G = R\varphi$. Arcul de cerc $R\varphi$ are aceeași lungime cu segmentul de dreaptă de lungime x_G (lungimea arcului de cerc $\widehat{IA_0}$ este egală cu lungimea segmentului $\overline{IA_0}$ care este egală cu x_G).



Sistemul de ecuații scalare capătă forma:

$$M\ddot{x}_G = Mg\sin\alpha - \phi$$
$$0 = -N + Mg\cos\alpha$$
$$J'_{zz}\ddot{\varphi} = \phi R - sN$$
$$\ddot{x}_G = R\ddot{\varphi}$$

Rezultă: $\phi = Mg\sin\alpha - M\ddot{x}_G$

$N = Mg\cos\alpha$

$J'_{zz}\dfrac{\ddot{x}_G}{R} = \phi R - sN$ unde $J'_{zz} = \dfrac{MR^2}{2}$

Înlocuim ϕ și N din primele două ecuații în ecuația a treia și se obține

$$\ddot{x}_G = \frac{2}{3}g\left(\sin\alpha - \frac{s}{R}\cos\alpha\right)$$

Deoarece centrul de masă se mişcă pe o dreaptă cu acceleraţie constantă, mişcarea sa este rectilinie uniform variată, adică legea de mişcare este

$$x(t)=\frac{2}{3}g\left(\sin\alpha-\frac{s}{R}\cos\alpha\right)\frac{t^2}{2}$$

în condiţiile iniţiale $x(0)=0$ şi $\dot{x}(0)=0$ $\left(s=s_0+v_0t+a_0\frac{t^2}{2}\right)$

Dinamica sistemelor

Ecuațiile de echilibru dinamic ale lui d'Alembert (metoda cinetostatică)

Prezentarea metodei cinetostatice de rezolvare a problemelor de dinamica sistemelor necesită calcularea torsorului forțelor de inerție.

În cazul unui punct material, principiul al doilea al lui Newton afirmă că

$$m\vec{a} = \vec{F}$$

unde m este masa punctului; $\vec{a}$ este accelerația punctului iar $\vec{F}$ este forța rezultantă care acționează asupra punctului.

Relația se mai scrie

$$\vec{F} - m\vec{a} = 0.$$

Produsul $-m\vec{a}$ este denumit forța de inerție care este notată $\vec{F}^{in}$. Cu această notație, relația anterioară se scrie

$$\vec{F} + \vec{F}^{in} = 0$$

Relația se ~~numește~~ ecuația de echilibru dinamic a lui d'Alembert. Denumirea de echilibru dinamic ~~vine de la asemănarea ecuației cu una de echilibru~~ static. În cazul unui sistem de "n" puncte materiale, având masele m_i $i=\overline{1,n}$ se definește câte o forță de inerție pentru fiecare punct din sistem

$$\bar{F}^{in} = -m_i \vec{a}_i \quad i=\overline{1,n}$$

Reamintim că în cazul unui sistem, forțele se împart în două categorii: forțe interioare provenite de la legăturile dintre corpurile sistemului și forțe exterioare care includ forțele provenite din legăturile corpurilor sistemului și mediu precum și forțele date.

Ecuațiile de echilibru dinamic ale lui d'Alembert ~~scrise~~ scrise pentru toate punctele sistemului sunt:

$$\vec{F}_{ext_i} + \vec{F}_{int_i} + \bar{F}_i^{in} = 0 \quad i=\overline{1,n}$$

Relațiile se mai pot scrie

$$\vec{F}_i + \bar{F}_i^{in} = 0 \quad i=\overline{1,n}$$

unde $\vec{F}_i$ notează rezultanta tuturor forțelor date și de legătură care acționează asupra punctului i.

Torsorul forțelor de inerție care acționează asupra unui solid rigid

Se consideră un solid rigid de masă M care este supus acțiunii unui sistem de forțe care are torsorul în polul O'

$$T_{O'} = \begin{cases} \vec{R} = R_x\bar{i} + R_y\bar{j} + R_z\bar{k} \\ \bar{M}_{O'} = M'_{Ox}\bar{i} + M'_{Oy}\bar{j} + M'_{Oz}\bar{k} \end{cases}$$

Torsorul forțelor de inerție în polul O' se definește astfel

$$\tau_{O'}(\bar{F}^{in}) = \begin{cases} \bar{F}^{in} = \int_{(M)} -\bar{a}\,dm \\ \vec{M}_{O'}^{in} = \int_{(M)} -(\bar{r}' \times \bar{a})\,dm \end{cases}$$

Forța de inerție se calculează astfel:

$$\bar{F}^{in} = -\int_{(M)} \bar{a}\,dm = -\int_{(M)} \frac{d\bar{v}}{dt}\,dm = -\frac{d}{dt}\int_{(M)} \bar{v}\,dm =$$

$$= -\frac{d}{dt}\vec{H} = -\dot{\vec{H}}$$

Operația de derivare în raport cu timpul poate fi scoasă în afara integralei pe masa M, deoarece sunt operații independente și interschimbabile ca ordine.

$$\vec{M}_{O'}^{in} = -\int_{(M)} (\bar{r}' \times a)\,dm = -\int_{(M)} \left[\vec{r}' \times \frac{d}{dt}\vec{v}\right] dm = -\int_{(M)} \left[\bar{r}' \times \frac{d}{dt}(\vec{v}_{O'} + \bar{\omega} \times \bar{r}')\right] dm$$

$$= -\int_{(M)} \left[\vec{r}' \times \left(\frac{d}{dt}\vec{v}_{O'}\right)\right] dm - \int_{(M)} \left[\bar{r}' \times \frac{d}{dt}(\bar{\omega} \times \bar{r}')\right] dm.$$

Deoarece $\frac{d\bar{r}'}{dt} = \vec{\omega} \times \bar{r}'$, în termenul al doilea putem adăuga exepresia nulă

$$\frac{d\bar{r}'}{dt} \times (\vec{\omega} \times \bar{r}')$$

care conduce la apariția sub integrală

a derivatei expresiei $\bar{r}'\times(\bar{\omega}\times\bar{r}')$.

$$\vec{M}_{0'}^{in} = -\int_{(M)} \bar{r}'\times\bar{a}_{0'}\,dm - \int_{(M)}\left[\frac{d}{dt}\left(\bar{r}'\times(\bar{\omega}\times\bar{r}')\right)\right]dm =$$

$$= -\int_{(M)} \bar{r}'\,dm\times\bar{a}_{0'} - \frac{d}{dt}\underbrace{\int_{(M)}\left[\bar{r}'\times(\bar{\omega}\times\bar{r}')\right]dm}_{\bar{K}_{0'rot}} =$$

$$= -M\vec{r}_G'\times\bar{a}_{0'} - \dot{\bar{K}}_{0'rot}.$$

Rezultă că torsorul forțelor de inerție în polul O' are forma

$$T_{0'}(\bar{F}^{in}) = \begin{cases} \bar{F}^{in} = -M\vec{a}_G \\ \vec{M}_{0'}^{in} = -\left[M\vec{r}_G'\times\bar{a}_{0'} + \dot{\vec{K}}_{0'rot}\right] \end{cases}$$

Observație. Dacă $\bar{\omega} = \dot{\varphi}\vec{k} = \dot{\varphi}\bar{k}'$, polul $O' \equiv G$ ($\bar{r}_G' = 0$) și axa Gz' este axă principală centrală de inerție, atunci torsorul forțelor de inerție capătă cea mai simplă formă

$$T_{G}(\vec{F}^{in}) = \begin{cases} \bar{F}^{in} = -M\bar{a}_G \\ \bar{M}_G^{in} = -J_{zz}'\ddot{\varphi}\bar{k}' = -J_{zz}'\vec{\varepsilon} \end{cases}$$

Ecuațiile de mișcare ale solidului rigid provenind din principiul impulsului și teorema momentului cinetic în raport cu polul O' legat de corp sunt

$$\bar{R} = \dot{\bar{H}} = M\bar{a}_G$$

$$\bar{M}_{0'} = M\vec{r}_G'\times\bar{a}_{0'} + \dot{\vec{K}}_{0'rot}$$

Trecem totul în membrul stâng.

$$\vec{R} - M\bar{a}_G = 0$$

$$\bar{M}_{O'} - [M\bar{r}'_G \times \bar{a}_{O'} + \dot{\vec{K}}_{O' rot}] = 0$$

și se obțin ecuațiile de echilibru dinamic ale lui d'Alembert pentru un solid rigid:

$$\bar{R} + \bar{F}^{in} = 0$$

$$\bar{M}_{O'} + \bar{M}_{O'}^{in} = 0.$$

În cazul unui sistem de "n" solide rigide, de mase M_i $i=\overline{1,n}$ se poate scrie câte un set de ecuații de echilibru dinamic pentru fiecare corp:

$$\vec{R}_i + \bar{F}_i^{in} = 0 \qquad i=\overline{1,n}$$

$$\vec{M}_{O'_i} + \bar{M}_{O'_i}^{in} = 0$$

De regulă polii O' se aleg în centrele de masă G_i ale corpurilor, deoarece în acest caz $\bar{r}'_{G_i} = 0$ și

$$\bar{M}_{O'_i}^{in} = -\dot{\bar{K}}'_{G_i rot}.$$