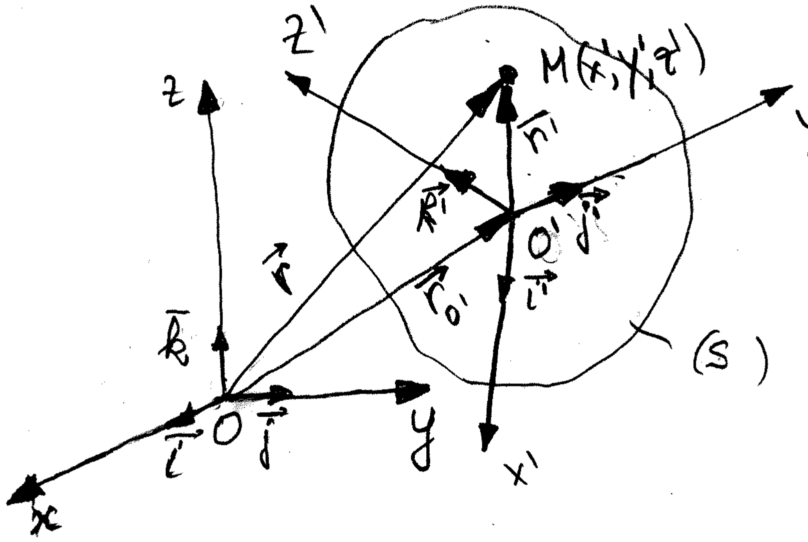
Curs anul II

Curs 2ore/săpt primele 11 săptămâni
Laborator 1oră/săpt, în total 7 laboratoare - prezență obligatorie
Finalizare cu colocviu 3 credite

1. Elemente recapitulative de cinematica mişcării absolute a solidului rigid

Se consideră un solid rigid (S) care se află în mişcare în raport cu un reper fix $R(O,\bar{i},\bar{j},\bar{k})$. De rigidul (S) este solidar un reper $R'(O',\bar{i}',\bar{j}',\bar{k}')$.



Fie M un punct arbitrar al corpului ale cărui coordonate în raport cu reperul mobil sunt x', y' şi z'. Aceste coordonate sunt constante în timpul mişcării rigidului şi se consideră cunoscute. Se consideră cunoscute mişcarea polului O', adica $x_{O'}(t)$, $y_{O'}(t)$ şi $z_{O'}(t)$ precum şi poziţia axelor acestui repere prin interme-

dinul cosinusurilor directoare $\alpha_{i,j}$, $i=\overline{1,3}$, $j=\overline{1,3}$.
Cosinusurile directoare sînt cosinusurile unghiurilor pe care le fac axele reperului mobil cu direcțiile axelor reperului fix. De exemplu, între axa Ox' și direcția axei Ox este un unghi α, atunci avem:

$$\alpha_{11} = \cos(\alpha) = \cos(\widehat{\vec{i}',\vec{i}})$$

Prin urmare există nouă cosinusuri directoare care formează matricea cosinusurilor directoare

$$\alpha = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{bmatrix}$$

După cum s-a explicat la cinematica rigidului, există trei cosinusuri directoare independente, celelalte șase putându-se calcula în funcție de ele folosind șase relații de legătură:

$$\alpha_{11}^2 + \alpha_{12}^2 + \alpha_{13}^2 = 1$$

$$\alpha_{21}^2 + \alpha_{22}^2 + \alpha_{23}^2 = 1$$

$$\alpha_{31}^2 + \alpha_{32}^2 + \alpha_{33}^2 = 1$$

$$\alpha_{11}\alpha_{21} + \alpha_{12}\alpha_{22} + \alpha_{13}\alpha_{23} = 0$$

$$\alpha_{21}\alpha_{31} + \alpha_{22}\alpha_{32} + \alpha_{23}\alpha_{33} = 0$$

$$\alpha_{11}\alpha_{31} + \alpha_{12}\alpha_{32} + \alpha_{13}\alpha_{33} = 0$$

Traiectoria punctului arbitrar M are ecuația vectorială

$$\boxed{\bar{r} = \vec{r}_{0'} + \bar{r}' \; [m]}$$

unde

$$\bar{r}_{0'} = x_{0'}\bar{i} + y_{0'}\bar{j} + z_{0'}\vec{k}$$

$$\bar{r}' = x'\bar{i}' + y'\bar{j}' + z'\bar{k}'$$

Viteza punctului arbitrar M are expresia:

$$\boxed{\vec{V} = \vec{v}_{0'} + \vec{\omega} \times \bar{r}' = \vec{v}_{0'} + \vec{v}_{rot} \left[\frac{m}{s}\right]}$$

unde $\vec{V}_{0'}$ și $\vec{\omega}$ sunt parametrii de ordinul întâi ai mișcării notați p.c.I.

$$p.c.I = \begin{cases} \bar{v}_{0'} = \dot{\bar{r}}_{0'} = \dot{x}_{0'}\bar{i} + \dot{y}_{0'}\bar{j} + \dot{z}_{0'}\bar{k} \Rightarrow \text{viteza polului } O' \left[\frac{m}{s}\right] \\ \bar{\omega} = \omega_x\bar{i}' + \omega_y\bar{j}' + \omega_z\bar{k}' = \omega_x\bar{i} + \omega_y\bar{j} + \omega_z\bar{k} \Rightarrow \text{viteza unghiulară a corpului } \left[\frac{rad}{s}\right] = [s^{-1}] \end{cases}$$

Accelerația punctului arbitrar M are expresia

$$\boxed{\bar{a} = \vec{a}_{0'} + \bar{\varepsilon} \times \bar{r}' + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}') \left[\frac{m}{s^2}\right]}$$

unde $\bar{a}_{0'}$ și $\bar{\varepsilon}$ sunt parametrii cinematici de ordinul doi ai mișcării, notați p.c.II

$$p.c.II = \begin{cases} \bar{a}_{0'} = \dot{\bar{v}}_{0'} = \ddot{x}_{0'}\bar{i} + \ddot{y}_{0'}\bar{j} + \ddot{z}_{0'}\bar{k} \Rightarrow \text{accelerația polului } O' \; [m/s^2] \\ \vec{\varepsilon} = \dot{\vec{\omega}} = \dot{\omega}_x'\bar{i}' + \dot{\omega}_y\bar{j}' + \dot{\omega}_z\vec{k}' = \\ = \dot{\omega}_x\bar{i} + \dot{\omega}_y\bar{j} + \dot{\omega}_z\bar{k} \Rightarrow \text{accelerația unghiulară a corpului } \left[\frac{rad}{s^2}\right] = [s^{-2}] \end{cases}$$

Dinamica solidului rigid

Impulsul unui solid rigid

În cazul punctului material, impulsul este dat de vectorul

$$\vec{H} \stackrel{def}{=} m \cdot \vec{v} \ \left[kg \cdot \frac{m}{s}\right]$$

unde m este masa punctului iar $\vec{v}$ este viteza acestuia.

Solidul rigid se consideră a fi format dintr-o infinitate de mase elementare dm. Impulsul corpului este dat de suma impulsurilor maselor elementare dm. Această sumă se efectuează prin integrare întrucât sunt o infinitate de termeni infinit mici dm. Rezultă deci că impulsul unui solid rigid este

$$\boxed{\vec{H} \stackrel{def}{=} \int_{(M)} \vec{v}\, dm \quad kg \cdot \frac{m}{s}}$$

unde $\vec{v}$ este viteza masei elementare (adică infinit mică) dm iar M este masa corpului.

Observație. Integrala pe masa M este un simbol. Pentru calculul efectiv, se are în vedere că masa elementară dm poate fi masa unui element de volum dV, al unui element de arie dA sau a unui element de lungime ds în funcție de categoria în care se încadrează corpul (volum material, suprafață materială sau curbă materială. Rezultă că putem avea

$$dm = \rho_V dV \ , \ dm = \rho_A dA \ , \ dm = \rho_L ds$$

unde ρ_V [kg/m^3] este densitatea volumică, ρ_A [kg/m^2] este densitatea de suprafață iar ρ_L [kg/m] este densitatea de lungime. În mod covârșitor în inginerie se lucrează cu corpuri omogene la care densitatea este aceeași în orice punct. Notând, în acest caz, densitățile cu ρ_V^0, ρ_A^0 și respectiv ρ_L^0, rezultă că masa corpului se calculează astfel în cele trei cazuri:

$$M = \int_{(V)} \rho_V^0 dV = \rho_V^0 \int_{V} dV = \rho_V^0 \cdot V$$

$$M = \int_{(A)} \rho_A^0 dA = \rho_A^0 \int_{(A)} dA = \rho_A^0 A$$

$$M = \int_{(\Gamma)} \rho_L^0 ds = \rho_L^0 \int_{(\Gamma)} ds = \rho_L^0 L$$

unde V, A și L sunt volumul, aria și respectiv lungimea corpului.

Se poate deduce o formulă de calcul a impulsului care nu implică calculul integral. Astfel, folosind formula de calcul a vitezei

$$\vec{v} = \vec{v}_{01} + \vec{\omega} \times \vec{r}'$$

se obține

$$\bar{H} = \int_{(M)} (\vec{v}_{01} + \vec{\omega} \times \vec{r}')\, dm = \int_{(M)} \vec{v}_{01}\, dm + \int_{(M)} (\vec{\omega} \times \vec{r}')\, dm =$$

$$= \vec{v}_{01} \int_{(M)} dm + \omega \times \int_{(M)} \vec{r}' dm = \vec{v}_{01} \cdot M + \vec{\omega} \times M \vec{r}'_G =$$

$$= M (\vec{v}_{01} + \vec{\omega} \times \vec{r}'_G)$$

Vitezele $\vec{v}_{01}$ și $\vec{\omega}$ nu depind de poziția masei elementare dm în corp, deci pot fi scoase în fața integralei așa cum se vede mai sus. De asemenea, din definiția vectorului de poziție a centrului de masă al corpului

$$\bar{r}'_G = \frac{\int_{(M)} \vec{r}' dm}{\int_{(M)} dm} = \frac{\int_{(M)} \vec{r}' dm}{M}$$

rezultă

$$\int_{(M)} \bar{r}' dm = M \bar{r}'_G$$

rezultat care a fost utilizat mai sus.

+

Dacă se aplică formula vitezei centrului de masă G al rigidului, viteza acestuia este

$$\vec{v}_G = \vec{v}_{O'} + \vec{\omega} \times \vec{r}'_G .$$

Prin urmare, impulsul unui solid rigid se calculează cu formula

$$\boxed{\vec{H} = M \cdot \vec{v}_G}$$

care se transcrie în cuvinte astfel:

Impulsul unui solid rigid este egal cu produsul dintre masa corpului și viteza centrului său de masă, ca și cum masa corpului ar fi concentrată în întregime în acel punct.
Cu alte cuvinte, impulsul unui solid rigid este ca și al unui punct material situat în centrul de masă G, care are masa egală cu masa M a întregului corp.

Momentul cinetic al unui solid rigid

În cazul punctului material de masă m, momentul cinetic într-un pol O era egal cu momentul vectorului impuls calculat în raport cu polul O:

$$\vec{K}_0 = \vec{r} \times \vec{H} = \vec{r} \times m\vec{v} \ \left[kg \frac{m^2}{s}\right]$$

În cazul solidului rigid, momentul cinetic în polul O se calculează ca suma momentelor cinetice în polul O ale tuturor maselor elementare dm. Deoarece este vorba de o sumă cu un număr infinit de termeni, se calculează prin integrare și se obține

$$\boxed{\vec{K}_0 \stackrel{def}{=} \int_{(M)} \bar{r} \times \bar{v}\, dm \ \left[kg \cdot \frac{m^2}{s}\right]}$$

Momentul cinetic în raport cu polul O' va fi

$$\boxed{\vec{K}_{O'} = \int_{(M)} \vec{r}' \times \vec{v}\, dm}$$

Din desen rezultă relația vectorială

$$\bar{r} = \vec{r}_{O'} + \vec{r}'$$

care, înlocuită în formula momentului cinetic în raport cu polul O, conduce la o relație de legătură între $\vec{K}_0$ și $K_{O'}$.

$$\vec{K}_0 = \int_{(M)} (\vec{r}_{O'} + \vec{r}') \times \vec{v}\, dm = \int_{(M)} \vec{r}_{O'} \times \vec{v}\, dm + \int_{(M)} \vec{r}' \times \vec{v}\, dm =$$

$$= \vec{r}_{O'} \times \int_{(M)} \vec{v}\, dm + \int_{(M)} \vec{r}' \times \vec{v}\, dm = \vec{r}_{O'} \times \vec{H} + \vec{K}_{O'}$$

unde $\vec{r}_{O'} = \overrightarrow{OO'}$.

observație. Se poate face o analogie între legea de variație a vectorului moment rezultant la schimbarea polului din O în O' cu relația de legătură între $\vec{K}_0$ și $\vec{K}_{01}$:

$$\vec{M}_0 = \vec{M}_{01} + \vec{OO'} \times \vec{R}$$

$$\vec{K}_0 = \vec{K}_{01} + \vec{OO'} \times \vec{H}.$$

Calculul momentului cinetic în polul O' se poate continua folosind relația de calcul a vitezei:

$$\vec{K}_{01} = \int_{(M)} [\vec{r'} \times (\vec{v}_{0'} + \vec{\omega} \times \vec{r'})] dm = \int_{(M)} \vec{r'} \times \vec{v}_{01} dm +$$

$$+ \int_{(M)} \vec{r'} \times \underbrace{(\vec{\omega} \times \vec{r'})}_{\text{notez } \vec{v}_{rot}} dm = \int_{(M)} \vec{r'} dm \times \vec{v}_{0'} + \int_{M} \vec{r'} \times \vec{v}_{rot} dm.$$

Rezultă:

$$\boxed{\vec{K}_{01} = M \vec{r}_G' \times \vec{v}_{01} + \vec{K}_{01rot}}$$

Termenul $K_{01rot} = \int_{(M)} \vec{r'} \times \vec{v}_{rot} dm = \int_{(M)} \vec{r'} \times (\vec{\omega} \times \vec{r'}) dm$ se numește moment cinetic de rotație în polul O' datorită faptului că produsul vectorial $\vec{\omega} \times \vec{r'}$ se mai numește viteză de rotație.

Momentul cinetic în polul O se scrie acum

$$\boxed{\vec{K}_0 = \vec{r}_{01} \times \vec{H} + M \vec{r}_G' \times \vec{v}_{01} + \vec{K}_{01rot}}$$

Momentul cinetic de rotație în polul O' se calculează astfel:

$$\vec{K}_{O'_{rot}} = \int_{(M)} \vec{r}' \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')\,dm = \int_{(M)} [\vec{r}'^2 \vec{\omega} - (\vec{r}'\cdot\vec{\omega})\cdot\vec{r}']\,dm$$

$$= \int_M [\underbrace{(x'^2+y'^2+z'^2)}_{\vec{r}'^2}\underbrace{(\omega'_x \vec{i}' + \omega'_y \vec{j}' + \omega'_z \vec{k}')}_{\vec{\omega}} - \underbrace{(x'\omega'_x + y'\omega'_y + z'\omega'_z)}_{\vec{r}'\cdot\vec{\omega}}\cdot$$

$$\cdot \underbrace{(x'\vec{i}' + y'\vec{j}' + z'\vec{k}')}_{\vec{r}'}]\,dm =$$

$$= \int_M [(x'^2+y'^2+z'^2)\omega'_x - x'^2\omega'_x - x'y'\omega'_y - x'z'\omega'_z]\,\vec{i}'\,dm +$$

$$+ \int_M [(x'^2+y'^2+z'^2)\omega'_y - x'y'\omega'_x - y'^2\omega'_y - y'z'\omega'_z]\,\vec{j}'\,dm +$$

$$+ \int_M [(x'^2+y'^2+z'^2)\omega'_z \vec{k}' - x'z'\omega'_x - y'z'\omega'_y - z'^2\omega'_z]\,\vec{k}'\,dm =$$

$$= \left[\left(\int_M (y'^2+z'^2)\,dm\right)\cdot\omega'_x - \left(\int_M x'y'\,dm\right)\omega'_y - \left(\int_M x'z'\,dm\right)\omega'_z\right]\vec{i}' +$$

$$+ \left[\left(\int_M (x'^2+z'^2)\,dm\right)\omega'_y - \left(\int_M x'y'\,dm\right)\omega'_x - \left(\int_M z'y'\,dm\right)\omega'_z\right]\vec{j}'$$

$$+ \left[\left(\int_{(M)} (x'^2+y'^2)\,dm\right]\omega'_z - \left(\int_M x'z'\,dm\right)\omega'_x - \left(\int_{(M)} y'z'\,dm\right)\omega'_z\right]\vec{k}'$$

Mărimile obținute prin integrare din expresia de mai sus se numesc <u>momente de inerție mecanice</u> și se notează astfel:

$$J'_{xx} \overset{not}{=} \int_{(M)} (y'^2 + z'^2)\,dm \qquad J'_{xy} \overset{not}{=} \int_{(M)} x'y'\,dm = J'_{yx}$$

$$J'_{yy} \overset{not}{=} \int_{(M)} (x'^2 + z'^2)\,dm \qquad J'_{yz} \overset{not}{=} \int_{(M)} y'z'\,dm = J'_{zy}$$

$$J'_{zz} \overset{not}{=} \int_{(M)} (x'^2 + y'^2)\,dm \qquad J'_{zx} \overset{not}{=} \int_{(M)} z'x'\,dm = J'_{xz}$$

Unitatea de măsură este $kg \cdot m^2$.

Cu aceste notații, momentul cinetic de rotație în polul O' capătă forma:

$$\vec{K}_{O'_{rot}} = [J'_{xx}\omega'_x - J'_{xy}\omega'_y - J'_{xz}\omega'_z]\bar{i}' +$$
$$[-J'_{yx}\omega'_x + J'_{yy}\omega'_y - J'_{yz}\omega'_z]\bar{j}' +$$
$$[-J'_{zx}\omega'_x - J'_{zy}\omega'_y + J'_{zz}\omega'_z]\bar{k}'$$

Pentru a putea ~~scrie~~ matriceal relația de mai sus, s-a introdus noțiunea de <u>matrice de inerție</u> în polul O', notată $J_{O'}$, de forma:

$$\mathbf{J}'_{O'} = \begin{bmatrix} J'_{xx} & -J'_{xy} & -J'_{xz} \\ -J'_{yx} & J'_{yy} & -J'_{yz} \\ -J'_{zx} & -J'_{zy} & J'_{zz} \end{bmatrix}$$

Această matrice este simetrică.

Componentele momentului cinetic de rotație se obțin ca elementele unei matrici care se calculează înmulțind matricea de inerție în polul O', $\mathbf{J}'_{O'}$, cu matricea coloană

$$\boldsymbol{\omega}' = \begin{bmatrix} \omega'_x \\ \omega'_y \\ \omega'_z \end{bmatrix}.$$

Se obține relația matriceală

$$\mathbf{K}'_{O'rot} = \mathbf{J}'_{O'} \cdot \boldsymbol{\omega}'.$$

Scrisă în detaliu, relația este

$$\begin{bmatrix} K'_{O'x} \\ K'_{O'y} \\ K'_{O'z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J'_{xx} & -J'_{xy} & -J'_{xz} \\ -J'_{yx} & J'_{yy} & -J'_{yz} \\ -J'_{zx} & -J'_{zy} & +J'_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega'_x \\ \omega'_y \\ \omega'_z \end{bmatrix}.$$

unde $K'_{O'x}$, $K'_{O'y}$ și $K'_{O'z}$ sunt componentele vectorului $\vec{K}'_{O'rot}$.

Energia cinetică a solidului rigid

În cazul punctului material, energia cinetică se calculează cu formula

$$E \overset{def}{=} \frac{1}{2} m \vec{v}^2 \ [J]$$

unde m este masa punctului iar $\vec{v}$ este viteza acestuia.

Energia cinetică a solidului rigid se calculează ca suma energiilor cinetice ale maselor elementare dm. Deoarece este vorba de o sumă cu un număr infinit de termeni, ea se efectuează prin integrare și se obține

$$\boxed{E \overset{def}{=} \int_{(M)} \frac{1}{2} \vec{v}^2 dm \quad [J]}$$

Pentru calcularea energiei cinetice a solidului rigid, se folosește formula de calcul a vitezei unui punct al corpului.

$$E = \frac{1}{2} \int_{(M)} (v_0 + \vec{\omega} \times \vec{r'})^2 dm = \frac{1}{2} \int_{M} [v_{0'}^2 + 2 v_{0'} (\vec{\omega} \times \vec{r'}) +$$

$$(\vec{\omega} \times \vec{r'})^2] dm = \frac{1}{2} \int_{(M)} v_{0'}^2 dm + \int_{(M)} \vec{v}_{0'} (\vec{\omega} \times \vec{r'}) dm + \frac{1}{2} \int_{(M)} (\vec{\omega} \times \vec{r'})^2 dm$$

$$= \frac{1}{2} \vec{v}_{0'}^2 \int_{(M)} dm + \vec{v}_{0'} \left(\vec{\omega} \times \int_{M} \vec{r'} dm\right) + \frac{1}{2} \int_{(M)} (\underbrace{\vec{\omega} \times \vec{r'}}_{v_{rot}})^2 dm$$

Deoarece $\int_{(M)} dm = M$ (masa corpului) iar $\int_{(M)} \vec{r}' dm = M \vec{r}'_G$, rezultă:

$$\boxed{E = \frac{1}{2} M v_{01}^2 + M \cdot \vec{v}_{01}(\vec{\omega} \times \vec{r}'_G) + E_{rot} \quad [J]}$$

Vectorii $\vec{v}_{01}$ și $\vec{\omega}$ se pot scoate în afara integralei deoarece nu depind de poziția elementului dm în interiorul corpului, ei fiind aceiași pentru toate punctele din corp (sunt vectori caracteristici rigidului).

Ultimul termen din energia cinetică se numește energie cinetică de rotație și se notează Erot datorită faptului că vectorul $\vec{\omega} \times \vec{r}'$ se mai numește viteză de rotație:

$$E_{rot} = \frac{1}{2} \int_{(M)} (\vec{\omega} \times \vec{r}')^2 dm = \frac{1}{2} \int_{M} v_{rot}^2 \, dm$$

Calculul acestei componente a energiei cinetice a solidului rigid se face folosind formula din calcul vectorial

$$(\vec{a} \times \vec{b})^2 + (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 = \vec{a}^2 \vec{b}^2$$

din care rezultă

$$(\vec{a} \times \vec{b})^2 = \vec{a}^2 \vec{b}^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2$$

Se obține

$$E'_{rot} = \frac{1}{2}\int_{(M)} \left[\bar{\omega}'^2 \bar{r}'^2 - (\bar{\omega}' \cdot \bar{r}')^2\right] dm =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{(M)} \left[(\omega_x'^2 + \omega_y'^2 + \omega_z'^2)(x'^2 + y'^2 + z'^2) - (\omega_x' x' + \omega_y' y' + \omega_z' z')^2\right] dm$$

$$= \frac{1}{2}\int_{(M)} \omega_x'^2 (y'^2 + z'^2) dm + \frac{1}{2}\int_{(M)} \omega_y'^2 (x'^2 + z'^2) dm + \frac{1}{2}\int_{M} \omega_z'^2 (x'^2 + y'^2) dm -$$

$$- \int_{M} \omega_x' \omega_y' x' y' dm - \int_{(M)} \omega_y' \omega_z' y' z' dm - \int_{(M)} \omega_x' \omega_z' x' z' dm.$$

$$= \frac{1}{2}\omega_x'^2 \int_{(M)} (y'^2 + z'^2) dm + \frac{1}{2}\omega_y'^2 \int_{(M)} (x'^2 + z'^2) dm + \frac{1}{2}\omega_z' \int_{(M)} (x'^2 + y'^2) dm -$$

$$- \omega_x' \omega_y' \int_{(M)} x' y' dm - \omega_y' \omega_z' \int_{(M)} y' z' dm - \omega_x' \omega_z' \int_{(M)} x' z' dm.$$

Se observă că integralele sunt tocmai momentele de inerție mecanice definite anterior, deci energia cinetică de rotație se scrie:

$$E'_{rot} = \frac{1}{2}\left[J'_{xx}\omega_x'^2 + J'_{yy}\omega_y'^2 + J'_{zz}\omega_z'^2 - 2J'_{xy}\omega_x'\omega_y' - 2J'_{yz}\omega_y'\omega_z' - 2J'_{xz}\omega_x'\omega_z'\right]$$

Energia cinetică de rotație se poate calcula folosind matricea de inerție în polul O' și matricea coloană ω' cu formula:

C1
C2

$$E_{rot} = \frac{1}{2}\omega'^{T} J_{O'}\omega'$$

Teoremele lui Köenig

Un caz particular des utilizat în dinamica rigidului este acela în care polul O' coincide cu centrul de masă G al corpului. În acest caz $\vec{r}\,'_G = 0$ iar momentul cinetic și energia cinetică capătă formele:

$$\vec{K}_O = \vec{r}_G \times M\vec{V}_G + \vec{K}_{G_{rot}}$$

$$E = \frac{1}{2}M\vec{V}_G^{\,2} + E_{rot}$$

Puterea și lucrul mecanic

În cazul unui punct material asupra căruia acționează un sistem de forțe care are rezultanta $\vec{R}$ și care se deplasează cu viteza $\vec{v}$, puterea sistemului de forțe este

$$P = \vec{R}\cdot\vec{v} \ [W]$$

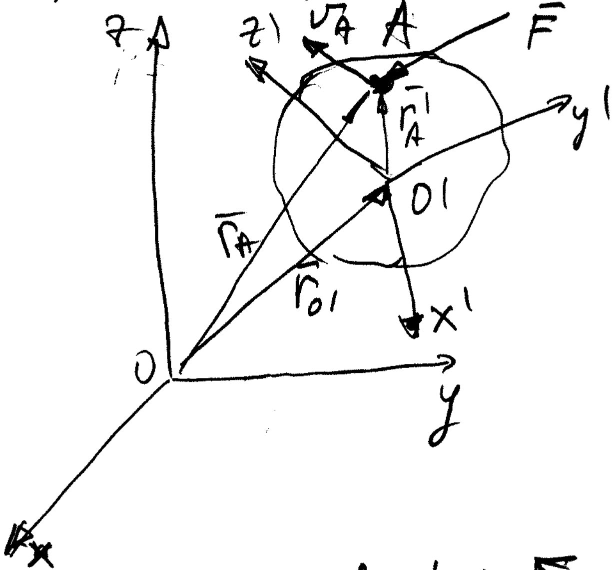
Se consideră un solid rigid în mișcare în raport cu un reper fix. Într-un punct A al corpului având viteza $\vec{v}_A$ acționează o forță $\vec{F}$. Puterea acestei forțe este

$$P = \vec{F}\cdot\vec{v}_A = \vec{F}\cdot(\vec{v}_{O'} + \vec{\omega}\times\vec{r}\,'_A) = \vec{F}\cdot\vec{v}_{O'} + \vec{F}\,(\vec{\omega}\times\vec{r}\,'_A)$$

Produsul mixt a trei vectori este comutativ ciclic adică are loc relația:

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = \vec{b}\cdot(\vec{c}\times\vec{a}) = \vec{c}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})$$

Aplicând comutativitatea ciclică, rezultă



$$P=\vec{F}\cdot\vec{v}_{O'}+\vec{\omega}\cdot(\vec{r}_A'\times\vec{F})$$

Pe de altă parte, momentul polar în raport cu polul O' al forței $\vec{F}$ este

$$\vec{M}_{O'}(\vec{F})=\vec{r}_A'\times\vec{F},$$

Puterea forței **F** se calculează cu formula:

$$\boxed{P=\vec{F}\cdot\vec{v}_{O'}+\vec{\omega}\cdot\vec{M}_{O'}(\vec{F})}$$

În cazul în care asupra corpului acționează un sistem de forțe $S=\{\vec{F}_1,\dots,\vec{F}_n\}$, care are torsorul în polul O'

$$\tau_{O'}(S)=\begin{cases}\vec{R}=\vec{F}_1+\vec{F}_2+\dots+\vec{F}_n=\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i\\ \vec{M}_{O'}=M_{O'}(\vec{F}_1)+\dots+\vec{M}_{O'}(\vec{F}_n)=\sum_{i=1}^{n}\vec{M}_{O'}(\vec{F}_i)\end{cases},$$

puterea P a acestui sistem este suma puterilor forțelor și avem

$$P_1=\vec{F}_1\cdot\vec{v}_{O'}+\vec{\omega}\cdot\vec{M}_{O'}(\vec{F}_1)$$

$$P_2=\vec{F}_2\cdot\vec{v}_{O'}+\omega\cdot\vec{M}_{O'}(\vec{F}_2)$$

$$\vdots$$

$$\vec{P}_n=\vec{F}_n\cdot\vec{v}_{O'}+\vec{\omega}\cdot\vec{M}_{O'}(\vec{F}_n)$$

$$P=P_1+P_2+\dots+P_n=\vec{v}_{O'}\underbrace{(\vec{F}_1+\vec{F}_2+\dots+\vec{F}_n)}_{\vec{R}}+\vec{\omega}\underbrace{(\vec{M}_{O'}(\vec{F}_1)+\vec{M}_{O'}(\vec{F}_2)+\dots+\vec{M}_{O'}(\vec{F}_n))}_{\vec{M}_{O'}}$$

Formula de calcul a puterii sistemului de forțe care acționează asupra unui solid rigid este

$$\boxed{P = \vec{V}_{01} \cdot \vec{R} + \vec{\omega} \cdot \vec{M}_{01} \; [W]}$$

Lucrul mecanic elementar $d\mathcal{L}$ al forței $\bar{F}$ aplicată în punctul A când acesta are o deplasare infinit mică (deplasare elementară) $d\vec{r}_A$, este

$$d\mathcal{L} = \vec{F} \cdot d\vec{r}_A \; [J].$$

Ca și în cazul punctului material, $d\mathcal{L}$ nu este întotdeauna o diferențială totală exactă, el fiind rezultatul înmulțirii unei mărimi finite $\bar{F}$ cu o mărime infinit mică $d\vec{r}_A$, ceea ce ~~nu asigură~~ că expresia este o diferențială totală exactă decât în anumite situații.

Deoarece:

$$d\vec{r}_A = \vec{V}_A \cdot dt = (\vec{V}_{01} + \vec{\omega} \times \vec{r}_A{}') dt$$

lucrul mecanic elementar capătă expresia

$$d\mathcal{L} = \vec{F} (\vec{V}_{01} + \vec{\omega} \times \vec{r}_A{}') dt = [\vec{F} \vec{V}_{01} + \vec{F} \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}_A{}')] dt$$

$$= [\vec{F} \cdot \vec{V}_{01} + \vec{\omega} (\vec{r}_A{}' \times \vec{F})] dt = [\vec{F} \cdot \vec{V}_{01} + \vec{\omega} \cdot \vec{M}_{01}(\vec{F})] dt =$$

$$= P \cdot dt$$

Când asupra rigidului acționează un sistem de forțe a cărui putere este P atunci lucrul mecanic elementar este

$$d\mathcal{L} = P dt = (\vec{V}_{01} \vec{R} + \vec{\omega} \cdot \vec{M}_{01}) dt$$

Lucrul mecanic efectuat într-un interval de timp $[t_0, t_1]$ este

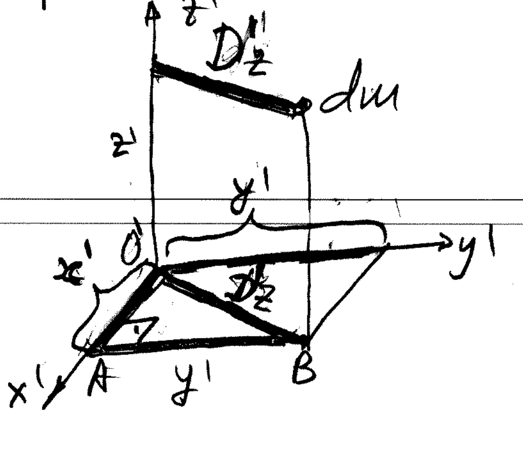
$$\mathcal{L} = \int_{t_0}^{t_1} P\,dt = \int_{t_0}^{t_1} (\vec{V}_{O_1}\cdot\vec{R} + \vec{\omega}\cdot\vec{M}_{O_1})\,dt$$

Momente de inerție

În calculul momentului cinetic și al energiei cinetice, au intervenit niște mărimi scalare pe care le-am denumit momente de inerție mecanice. Acestea sunt de două tipuri:

(1) $J'_{xx} = \int_{(M)} (y'^2+z'^2)\,dm \quad J'_{yy} = \int_{(M)} (x'^2+z'^2)\,dm \quad J'_{zz} = \int_{M} (x'^2+y'^2)\,dm$

numite momente de inerție axiale. Ele sunt strict pozitive deoarece se obțin prin integrarea unei funcții pozitive. Denumirea provine de la faptul că suma pătratelor celor două coordonate reprezintă pătratul distanței de la elementul de masă dm la axa a cărei denumire nu apare în coordonate. De exemplu, așa cum rezultă din desen folosind teorema lui Pitagora aplicată în triunghiul dreptunghic O'AB avem



$$D_z'^2 = x'^2 + y'^2$$ iar

$$J'_{zz} = \int_{(M)} D_z'^2\,dm$$

② $J'_{xy}=\int_M x'y'\,dm$ $\quad J'_{yz}=\int_M y'z'\,dm$ $\quad J'_{zx}=\int_M z'x'\,dm$

numite momente de inerție centrifugale sau produse de inerție. Ele pot fi pozitive, negative sau nule. Deoarece produsul coordonatelor este comutativ, avem

$$J'_{xy}=J'_{yx} \quad J'_{yz}=J'_{zy} \quad J'_{zx}=J'_{xz}.$$

Momentele de inerție mecanice depind de materialul din care este confecționat corpul prin masa dm și de forma geometrică a acestuia prin coordonatele acestei mase elementare.

În cazul corpurilor omogene densitatea constantă poate fi scoasă în fața integralei ($dm=\rho_V^0\,dV$, $dm=\rho_A^0\,dA$, $dm=\rho_L^0\,ds$) și rezultă o relație generică de forma

$$J=\rho^0 I$$

unde I se numește moment de inerție geometric. El nu mai depinde de material ci doar de forma geometrică a corpului.

De exemplu, la un corp volumic omogen la care $dm=\rho_V^0\,dV$, momentul de inerție axial J'_{xx} se calculează astfel:

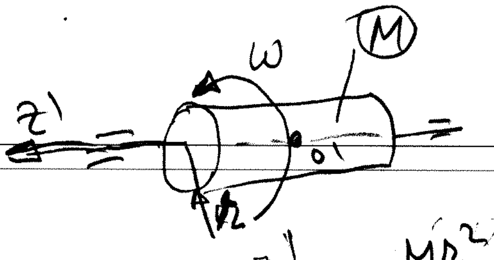
$$J'_{xx} = \int_{(M)} (y'^2+z'^2)\,dm = \int_{(V)} (y'^2+z'^2)\rho_V^0\,dV = \rho_V^0 \int_{(V)} (y'^2+z'^2)\,dV =$$

$$= \rho_V^0\, I'_{zz}.$$

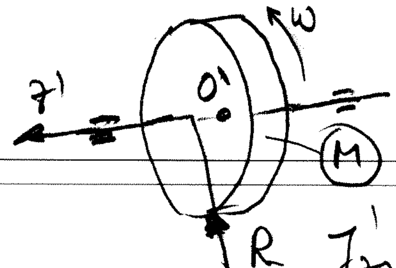
sau

$$J'_{xy} = \int_{(M)} x'y'\,dm = \int_{(V)} x'y'\rho_V^0\,dV = \rho_V^0 \int_{(V)} x'y'\,dV = \rho_V^0\, I'_{xy}$$

Observație. Cu cât substanța corpului este mai depărtată de axe, cu atât momentele de inerție axiale sunt mai mari. De exemplu, dacă avem doi cilindri care se pot roti în jurul axei și care au aceeași masă dar unul are raza R și este lung iar celălalt are raza R dar este îngust, cel de al doilea are momentul de inerție mai mare față de axa de rotație $O'z'$. În consecință va putea fi rotit făcând un efort mai mare (are o inerție mai mare la rotație) dar va înmagazina o energie cinetică mai mare.



$$J'_{zz} = \frac{MR^2}{2}$$



$$J'_{zz} = \frac{MR^2}{2}$$

Observație. Momentul de inerție al unui cilindru de rază R și masă M în raport cu axa de simetrie este $\frac{MR^2}{2}$. Există tabele cu momentele de inerție ale unor corpuri.

Momente principale de inerție. Axe principale de inerție

Dacă $J'_{xz} = J'_{yz} = 0$ atunci se spune că axa $O'z'$ este axă principală de inerție

Dacă $J'_{xy} = J'_{zy} = 0$ atunci se spune că axa $O'y'$ este axă principală de inerție

Dacă $J'_{zx} = J'_{yx} = 0$ atunci se spune că axa $O'x'$ este axă principală de inerție.

Dacă două axe ale unui reper sunt axe principale de inerție, atunci cea de a treia este, în mod automat, axă principală de inerție.

Dacă două momente de inerție centrifugale sunt nule, atunci axele reperului sunt, evident, axe principale de inerție iar momentele de inerție axiale corespun-

-zătoare acestor axe sunt numite <u>momente principale de inerție</u>. Se va arăta că în orice punct (pol) se poate determina un reper unic ale cărui axe sunt axe principale de inerție. Dacă polul este centrul de masă al corpului, atunci axele principale de inerție se numesc <u>axe principale centrale de inerție</u>, iar momentele de inerție axiale corespunzătoare lor se numesc <u>momente principale centrale de inerție</u>.

În cazul unui reper ale cărui axe sunt axe principale de inerție, matricea de inerție are forma diagonală:

$$\mathbf{J}'_{O'} = \begin{bmatrix} J'_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & J'_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & J'_{zz} \end{bmatrix}.$$

De asemenea, în acest caz, momentul cinetic de rotație și energia cinetică de rotație au expresii mult mai simple:

$$\vec{K}_{O'rot} = J'_{xx}\omega'_x\vec{i}' + J'_{yy}\omega'_y\vec{j}' + J'_{zz}\omega'_z\vec{k}'$$

$$E_{rot} = \frac{1}{2}\left[J'_{xx}\omega'^2_x + J'_{yy}\omega'^2_y + J'_{zz}\omega'^2_z\right]$$

Din acest motiv, se va căuta întotdeauna ca reperul legat de corp să fie unul ale cărui axe să fie axe principale de inerție.

Cea mai simplă formă a momentului cinetic de rotație și a energiei cinetice de rotație este atunci când axele reperului sunt axe principale de inerție iar viteza unghiulară a corpului are direcția fixă a axei Oz (axele Oz și $O'z'$ sunt paralele):

$$\vec{\omega} = \omega'_z \vec{k'} = \omega_z \vec{k} = \dot{\varphi} \vec{k} = \dot{\varphi} \vec{k'}, \quad \omega'_x = \omega'_y = 0.$$

Momentul cinetic de rotație și energia cinetică de rotație au, în acest caz, expresiile:

$$\vec{K}_{O'_{rot}} = J'_{zz} \omega'_z \vec{k'} = J'_{zz} \dot{\varphi} \vec{k'}$$

$$E_{rot} = \frac{1}{2} J'_{zz} \omega'^2_z = \frac{1}{2} J'_{zz} \dot{\varphi}^2.$$

Un caz particular întâlnit la dinamica mișcării de rotație în jurul unei axe fixe care va fi prezentată ulterior este acela în care axele reperului legat de corp nu sunt axe principale de inerție dar viteza unghiulară are, ca mai sus, direcția fixă a axei Oz. În acest caz, expresia momentului cinetic de rotație și a energiei cinetice de rotație sunt::

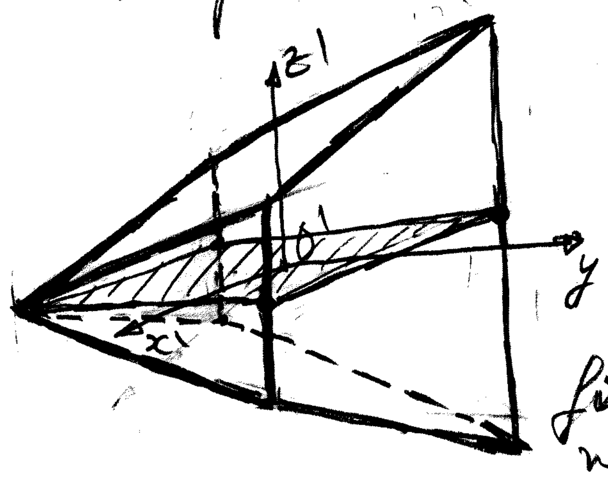
$$\vec{K}_{O'rot} = -J'_{xz}\dot{\varphi}\vec{i'} - J'_{yz}\dot{\varphi}\vec{j'} + J'_{zz}\dot{\varphi}\vec{k'}$$

$$E_{rot} = \frac{1}{2}J'_{zz}\dot{\varphi}^2$$

Proprietăți ale momentelor de inerție

Momentele de inerție au următoarele proprietăți importante care vor fi prezentate fără demonstrație.

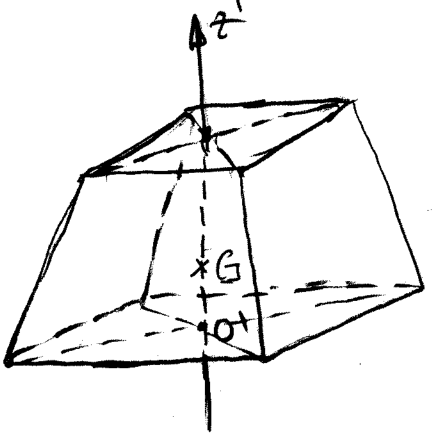
① Dacă un corp are un plan de simetrie materială, atunci orice axă perpendiculară pe acel plan este axă principală de inerție. Un exemplu este dat în figura următoare.



$J'_{xz} = J'_{yz} = 0$

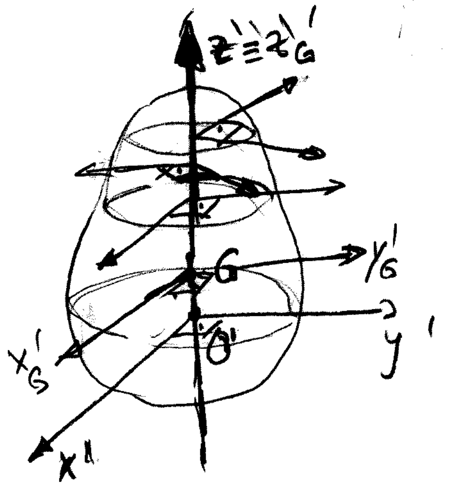
Axa $O'z'$ este axă principală de inerție fiind perpendiculară pe planul de simetrie hașurat.

② Dacă un corp are o axă de simetrie materială atunci aceasta este axă principală centrală de inerție. Un exemplu este dat în figura următoare.



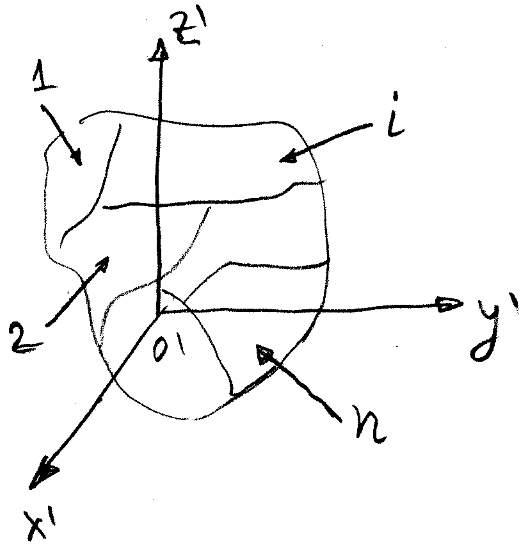
Trunchiul de piramidă pătrată regulată din desen are ca axă de simetrie axa $O'z'$. deci ea este axă principală centrală de inerție.

Consecință. Dacă un corp are o axă de simetrie de revoluție, atunci aceasta este axă principală centrală de inerție. Oricare alte două axe reciproc perpendiculare și perpendiculare pe axa de simetrie vor fi axe principale de inerție și toate trei vor forma un reper cu axe principale de inerție.



În desenul alăturat este figurat un corp care are axa $O'z'$ ca axă de simetrie de revoluție. Oricare alte două axe perpendiculare între ele și perpendiculare pe axa $O'z'$ formează un reper ale cărui axe sunt axe principale de inerție. Dacă se alege polul O' în centrul de masă G al corpului, axele reperului vor fi axe principale centrale de inerție

③ Dacă un corp este împărțit în "n" zone (porțiuni), atunci momentele de inerție ale corpului în raport cu axele unui reper sunt egale cu suma momentelor de inerție corespunzătoare ale zonelor simple calculate în raport cu axele aceluiași reper.



Desenul alăturat reprezintă un solid rigid care a fost împărțit în "n" zone ale căror momente de inerție sunt notate $J'^{(i)}_{xx}$, $J'^{(i)}_{yy}$, $J'^{(i)}_{zz}$, $J'^{(i)}_{xy}$, $J'^{(i)}_{yz}$, $J'^{(i)}_{xz}$ cu $i=\overline{1,n}$ și sunt calculate în raport cu axele reperului $O'x'y'z'$. Momentele de inerție ale întregului corp sunt

$$J'_{xx} = J'^{(1)}_{xx} + J'^{(2)}_{xx} + \dots + J'^{(n)}_{xx} = \sum_{i=1}^{n} J'^{(i)}_{xx}$$

$$J'_{yy} = J'^{(1)}_{yy} + J'^{(2)}_{yy} + \dots + J'^{(n)}_{yy} = \sum_{i=1}^{n} J'^{(i)}_{yy}$$

$$J'_{zz} = J'^{(1)}_{zz} + J'^{(2)}_{zz} + \dots + J'^{(n)}_{zz} = \sum_{i=1}^{n} J'^{(i)}_{zz}$$

$$J'_{xy} = J'^{(1)}_{xy} + J'^{(2)}_{xy} + \dots + J'^{(n)}_{xy} = \sum_{i=1}^{n} J'^{(i)}_{xy}$$

$$J'_{yz} = J'^{(1)}_{yz} + J'^{(2)}_{yz} + \dots + J'^{(n)}_{yz} = \sum_{i=1}^{n} J'^{(i)}_{yz}$$

$$J'_{xz} = J'^{(1)}_{xz} + J'^{(2)}_{xz} + \dots + J'^{(n)}_{xz} = \sum_{i=1}^{n} J'^{(i)}_{xz}$$

Observație. Dacă corpul este omogen și sunt zone care se scot (goluri) atunci ele se vor considera pline cu același material și momentele lor de inerție se vor introduce în sumele de mai sus cu semnul minus.

Relații între momentele de inerție

Mergând pe ideea că momentele de inerție axiale au la bază produsul dintre elementul de masă dm și pătratul distanței până la axă, se mai pot defini următoarele momente de inerție:

① Momentul de inerție polar în care se înmulțește elementul de masă cu pătratul distanței până la polul O'

$$J'_{O'} = \int_{(M)} (x'^2 + y'^2 + z'^2)\, dm$$

② Momente de inerție planare în care se înmulțește elementul de masă dm cu pătratul distanței până la planele de coordonate:

$$J'_{P_1} = \int_{(M)} x'^2 dm \quad , \quad J'_{P_2} = \int_{(M)} y'^2 dm \quad \text{și} \quad J'_{P_3} = \int_{(M)} z'^2 dm$$

unde P_1 este planul $y'O'z'$, P_2 este planul $x'O'z'$ iar P_3 este planul $x'O'y'$.

Între momentele de inerție se pot deduce câteva relații de legătură de tipul:

$$J'_{O'} = J'_{P_1} + J'_{P_2} + J'_{P_3}$$

$$J'_{O'} = \frac{1}{2}\left(J'_{xx} + J'_{yy} + J'_{zz}\right)$$

$$J'_{xx} = J'_{P_2} + J'_{P_3} \quad J'_{yy} = J'_{P_1} + J'_{P_3} \quad J'_{zz} = J'_{P_1} + J'_{P_2}$$

$$J'_{P_1} = \frac{1}{2}\left(J'_{yy} + J'_{zz} - J'_{xx}\right)$$

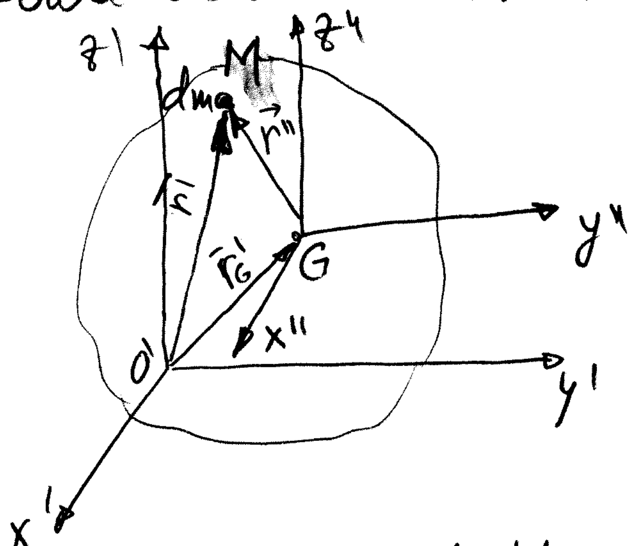
$$J'_{P_2} = \frac{1}{2}\left(J'_{xx} + J'_{zz} - J'_{yy}\right)$$

$$J'_{P_3} = \frac{1}{2}\left(J'_{xx} + J'_{yy} - J'_{zz}\right)$$

În continuare se va analiza variația momentelor de inerție la translația și rotația reperului solidar cu corpul. Aceste studii sunt necesare la calculul momentelor de inerție ale unui corp când se utilizează împărțirea pe zone simple și la aflarea reperului ale cărui axe sunt axe principale de inerție și a momentelor principale de inerție.

Variația momentelor de inerție la translația axelor. Teorema lui Steiner

Se consideră un solid rigid (S) de care este atașat un reper $R'(O', \bar{i}', \bar{j}', \bar{k}')$ cu polul într-un punct oarecare O' și un reper $R''(G, \bar{i}'', \bar{j}'', \bar{k}'')$ cu polul în centrul de masă G al corpului. Cele două repere au axele paralele, așa cum se poate vedea în desen. Se consideră un punct oarecare M al corpului, căruia îi corespunde o masă elementară dm.



Din desenul alăturat rezultă, aplicând regula triunghiului, următoarea relație:

$$\bar{r}' = \vec{r}'_G + \bar{r}''$$

de unde

$$\bar{r}'' = \bar{r}' - \vec{r}'_G,$$

care revine la următoarele relații scalare:

$$x'' = x' - x'_G$$

$$y'' = y' - y'_G$$

$$z'' = z' - z'_G.$$

Se consideră cunoscute momentele de inerție ale corpului în raport cu reperul $R'(O', \vec{i'}, \vec{j'}, \vec{k'})$ și se dorește determinarea momentelor de inerție în raport cu reperul $R''(G, \vec{i''}, \vec{j''}, \vec{k''})$.

$$J''_{xx} = \int_{(M)} (y''^2 + z''^2)\,dm = \int_{(M)} [(y' - y'_G)^2 + (z' - z'_G)^2]\,dm =$$

$$= \int_{(M)} (y'^2 + z'^2)\,dm - 2\int_{(M)} (y' y'_G)\,dm - 2\int_{(M)} (z' \cdot z'_G)\,dm +$$

$$+ \int_{(M)} (y'^2_G + z'^2_G)\,dm = J'_{xx} - 2y'_G \int_{(M)} y'\,dm - 2z'_G \int_{(M)} z'\,dm +$$

$$+ (y'^2_G + z'^2_G)\int_{(M)} dm = J'_{xx} - 2My'^2_G - 2Mz'^2_G + M(y'^2_G + z'^2_G) =$$

$$= J'_{xx} - (y'^2_G + z'^2_G)M.$$

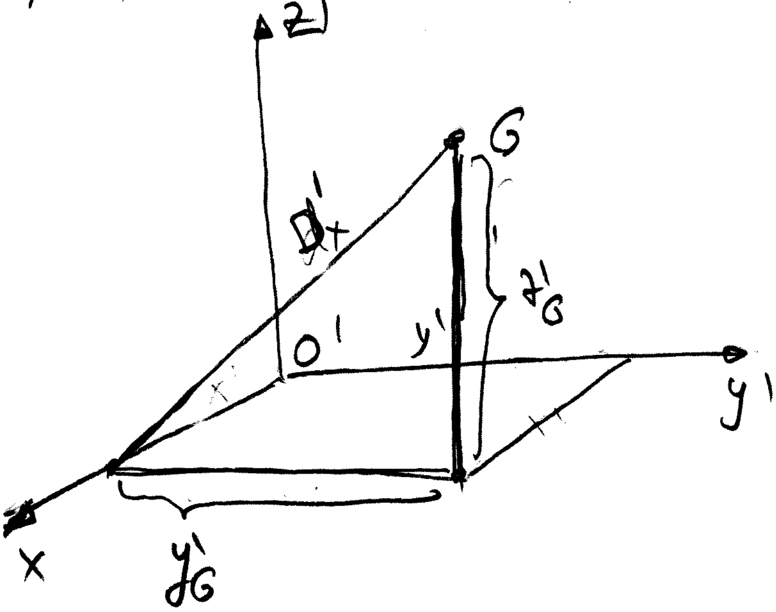
Coordonatele y'_G și z'_G sunt independente de poziția masei elementare dm în corp, deci pot fi scoase în afara integralei. De asemenea

$$\int_{(M)} z'\,dm = Mz'_G \quad \text{și} \quad \int_{(M)} y'\,dm = My'_G$$

așa cum rezultă din modul de calcul al coordonatelor centrului de masă.

$$z'_G = \frac{\int_{(M)} z'\,dm}{\int_{(M)} dm} = \frac{\int_{(M)} z'\,dm}{M} \qquad y'_G = \frac{\int_{(M)} y'\,dm}{\int_{(M)} dm} = \frac{\int_{(M)} y'\,dm}{M}$$

Suma $y_G'^2 + z_G'^2$ este tocmai pătratul distanței de la punctul M la axa O'x' (vezi desenul), distanță notată D_x'



Relația de calcul a momentului de inerție J''_{xx} se scrie

$$J''_{xx} = J'_{xx} - D_x'^2 M$$

sau încă

$$J'_{xx} = J''_{xx} + (y_G'^2 + z_G'^2) M = J''_{xx} + D_x'^2 M$$

În mod analog, pentru momentele axiale J'_{yy} și J'_{zz} se deduc relațiile

$$J'_{yy} = J''_{yy} + (x_G'^2 + z_G'^2) M = J''_{yy} + D_y'^2 M$$

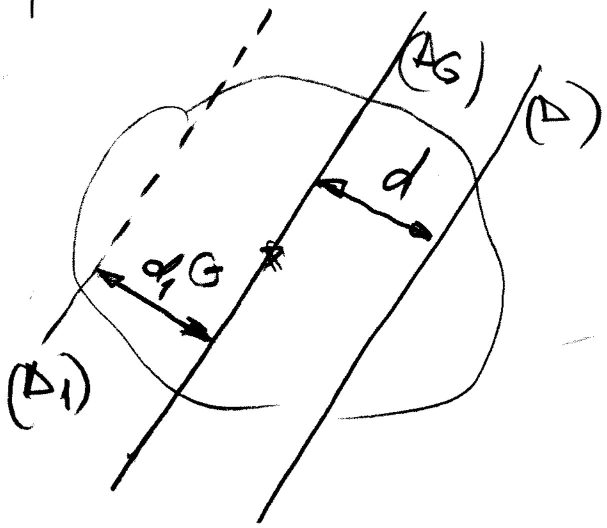
$$J'_{zz} = J''_{zz} + (x_G'^2 + y_G'^2) M = J''_{zz} + D_z'^2 M$$

unde D_y' și D_z' reprezintă distanțele de la punctul M la axele O'y' și O'z'.

Cele trei relații de mai sus, care reprezintă variația momentelor de inerție axiale la translația axelor, se generalizează într-o formulă denumită teorema lui Steiner după numele mecanicianului care a formulat-o.

Teorema lui Steiner

Momentul de inerție al unui corp în raport cu o axă (Δ) este egal cu momentul de inerție al corpului în raport cu o axă (Δ_G) paralelă cu prima și care trece prin centrul de masă G al corpului, la care se adună produsul dintre masa corpului și pătratul distanței dintre axe.



$$\boxed{J_\Delta = J_{\Delta_G} + Md^2}$$

Dacă se consideră încă o axă (Δ_1) paralelă cu axa (Δ_G), distanța dintre ele fiind d_1 (vezi desenul), atunci putem scrie relația

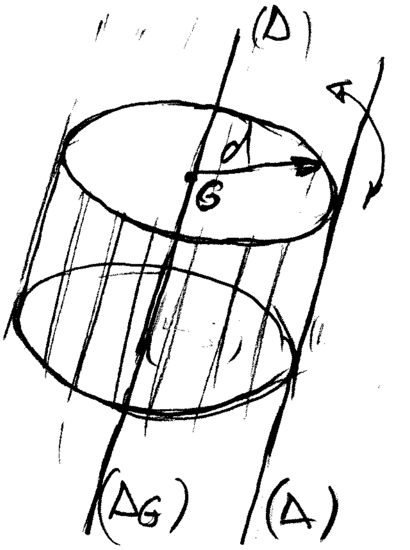
$$J_{\Delta_1} = J_{\Delta_G} + Md_1^2$$

Eliminând J_{Δ_G} între ultimile două relații, se obține

$$J_\Delta = J_{\Delta_1} + M(d^2 - d_1^2).$$

Relația arată că atunci când $d = d_1$, $J_\Delta = J_{\Delta_1}$.

Prin urmare, momentul de inerție față



de generatoarea unei suprafețe cilindrice ce are ca axă (Δ_G) și raza d este același indiferent de poziția generatoarei (Δ).

Momentul de inerție centrifugal J_{xy} se calculează astfel

$$J''_{xy} = \int_{(M)} x'' y'' dm = \int_{(M)} (x' - x'_G)(y' - y'_G)\, dm =$$

$$= \int_{(M)} x' y' dm - \int_{(M)} x' y'_G dm - \int_{(M)} x'_G y' dm + \int_{(M)} x'_G y'_G dm =$$

$$= J'_{xy} - y'_G \int_{(M)} x' dm - x'_G \int_{(M)} y' dm + x'_G y'_G \int_{(M)} dm =$$

$$= J'_{xy} - x'_G y'_G M - x'_G y'_G M + x'_G y'_G M =$$

$$= J'_{xy} - M x'_G y'_G .$$

Relația se mai scrie

$$J'_{xy} = J''_{xy} + M x'_G y'_G$$

În mod analog se deduc relațiile

$$J'_{yz} = J''_{yz} + M y'_G z'_G$$

$$J'_{zx} = J''_{zx} + M x'_G z'_G$$

Cele trei relații de mai sus reprezintă variația momentelor de inerție centrifugale la translația axelor.

<u>Observație</u>. Teorema lui Steiner arată că cel mai mic moment de inerție al corpului după o direcție este atunci când dreapta după direcția respectivă trece prin centrul de masă G al corpului. Pentru orice altă axă paralelă cu cea care trece prin G momentul de inerție se mărește cu valoarea strict pozitivă Md^2. Cu alte cuvinte, după dreapta care trece prin G momentul de inerție după acea direcție este <u>MINIM</u>.

Despre momentele de inerție centrifugale nu se poate afirma așa ceva, deoarece produsul dintre coordonatele centrului de masă poate fi pozitiv, negativ sau nul.

Calculul matricii de inerție în cazul translației axelor se poate face dacă se introduce matricea antisimetrică

$$\hat{\mathbf{r}}'_G = \begin{bmatrix} 0 & -z'_G & y'_G \\ z'_G & 0 & -x'_G \\ -y'_G & x'_G & 0 \end{bmatrix}$$

Matricea de inerție în centrul de masă G $\mathbf{J}''_G$ când se cunosc matricile $\mathbf{J}'_{O'}$ și $\mathbf{r}'_G$ se calculează cu formula

$$\mathbf{J}''_G = \mathbf{J}'_{O'} - M \cdot \hat{\mathbf{r}}'_G \, \hat{\mathbf{r}}'^{T}_G$$

unde M este masa corpului iar indicele superior T înseamnă matricea transpusă.

Variația momentelor de inerție la rotația axelor

Calculul componentelor momentului cinetic de rotație într-un pol O' se face, după cum s-a arătat, cu formula matricială

$$\mathbf{K}_{O'rot} = \mathbf{J}'_{O'} \cdot \boldsymbol{\omega}.$$

Această relație poate fi interpretată ca fiind relația care definește un operator liniar U definit pe mulțimea Ω a vectorilor viteză unghiulară ω și având valori în mulțimea K' a vectorilor a vectorilor moment cinetic de rotație $K_{O'rot}$

$$U : \Omega \rightarrow K'$$

Acesta este un operator liniar deoarece

$$\Omega(\alpha\omega_1 + \beta\omega_2) = \alpha\,\Omega(\omega_1) + \beta\,\Omega(\omega_2),\ \alpha,\beta \in R$$

unde α, β sunt numere reale.

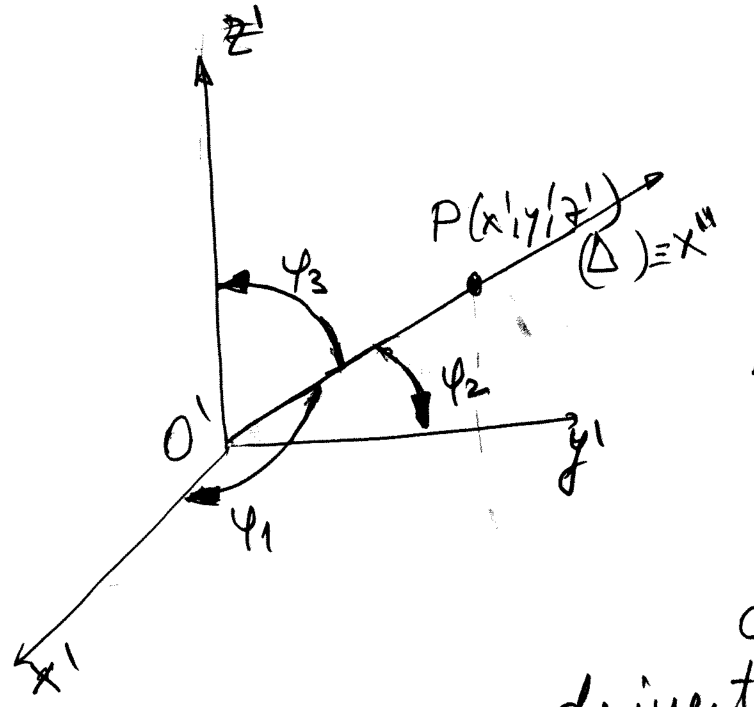
Matricea $J_{O'}$ a operatorului liniar se modifică la schimbarea bazei $(\bar{i}', \bar{j}', \bar{k}')$ în baza $(\bar{i}'', \bar{j}'', \bar{k}'')$ după legea

$$\boxed{J''_{O'} = \alpha\, J'_{O'}\, \alpha^T}$$

unde α este matricea cosinusurilor directoare ale bazei $(\vec{i}'', \vec{j}'', \vec{k}'')$.

Determinarea axelor principale de inerție și a momentelor principale de inerție

Se consideră o axă (Δ) având cosinusurile directoare $\cos\varphi_1 = \alpha$, $\cos\varphi_2 = \beta$ și $\cos\varphi_3 = \gamma$



Dacă această axă ar fi tocmai axa $O'x''$ al unui reper $R''(O', \vec{i''}, \vec{j''}, \vec{k''})$ rotit față de reperul $R'(O', \vec{i'}, \vec{j'}, \vec{k'})$ și s-ar cunoște matricea de inerție $J'_{O'}$ și matricea cosinusurilor directoare α pentru reperul R'', atunci matricea de inerție pentru reperul R'' este

$$J''_{O'} = \alpha J'_{O'} \alpha^T .$$

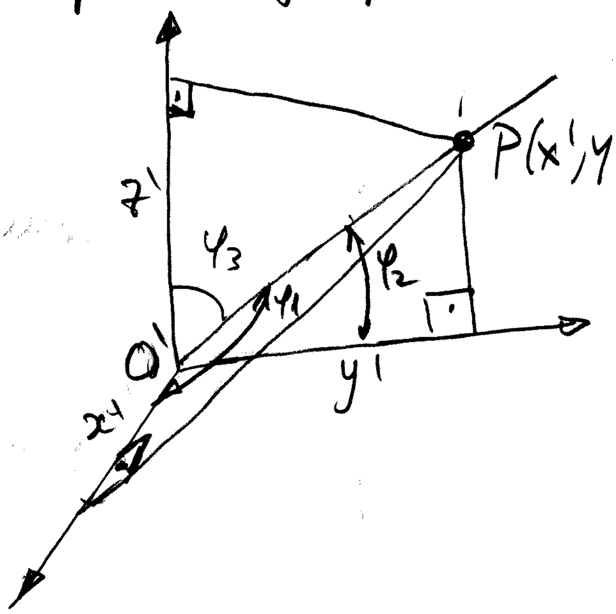
Din această relație se obține următoarea formulă de calcul pentru momentul de inerție J''_{xx}

$$J''_{xx} = J_\Delta = J'_{xx}\alpha^2 + J'_{yy}\beta^2 + J'_{zz}\gamma^2 - 2J'_{xy}\alpha\beta - 2J'_{yz}\beta\gamma - 2J'_{xz}\alpha\gamma .$$

Se consideră acum pe axa (Δ) un punct P de coordonate x', y' și z' astfel încât

$$|O'P| = \frac{c}{\sqrt{J_\Delta}}$$

unde c este o constantă pozitivă neprecizată. Atunci când axa (Δ) ocupă diverse poziții în spațiu prin modificarea unghiurilor φ_1, φ_2 și φ_3, distanța OP se modifică invers proporțional cu mărimea momentului de inerție axial J_Δ. Deoarece J_Δ este o mărime strict pozitivă ($J_\Delta > 0$), punctul P nu poate fi plasat la infinit, deci O'P este finit.



Din desen rezultă următoarele expresii pentru cosinusurile directoare:

$$\alpha = \cos\varphi_1 = \frac{x'}{|O'P|}$$

$$\beta = \cos\varphi_2 = \frac{y'}{|O'P|}$$

$$\gamma = \cos\varphi_3 = \frac{z'}{|O'P|}$$

Se înlocuiesc cosinusurile directoare în formula de calcul a momentului de inerție J_Δ și rezultă

$$\frac{C^2}{|O'P|^2} = J'_{xx}\frac{x'^2}{|O'P|^2} + J'_{yy}\frac{y'^2}{|O'P|^2} + J'_{zz}\frac{z'^2}{|O'P|^2} - 2\frac{J'_{xy}}{|O'P|^2}x'y' - 2\frac{J'_{yz}}{|O'P|^2}y'z' -$$

$$-2\frac{J'_{xz}}{|O'P|^2}x'z'$$

După simplificarea lui $|O'P|^2$ se obține:

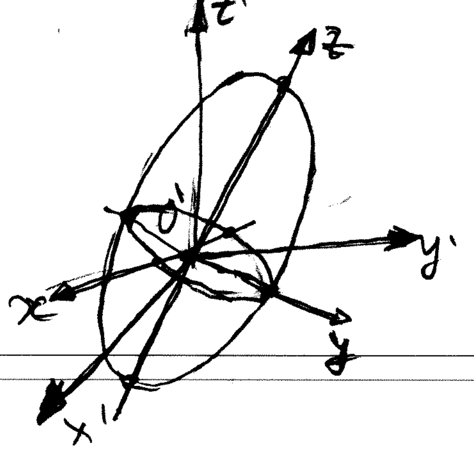
$$J'_{xx}x'^2 + J'_{yy}y'^2 + J'_{zz}z'^2 - 2J'_{xy}x'y' - 2J'_{yz}y'z' - 2J'_{xz}x'z' = C^2$$

Această relație arată că, atunci când axa (Δ) își schimbă poziția, coordonatele x', y' și z' ale punctului P satisfac această relație care este ecuația unei cuadrice cu centru fără puncte la infinit, adică un **elipsoid** denumit <u>elipsoidul de inerție în polul O'</u>.

Ecuația acestui elipsoid în raport cu un reper $R(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ale cărui axe coincid cu axele elipsoidului este:

$$J_{xx}x^2 + J_{yy}y^2 + J_{zz}z^2 = C^2$$

și reprezintă ecuația canonică a elipsoidului.



Din această ecuație lipsesc termenii J_{xx}, J_{yy} și J_{zz} care sunt nuli. Prin urmare, axele elipsoidului de inerție sunt <u>axe princi-</u>

pale de inerție în polul O'. Momentele axiale de inerție J_{xx}, J_{yy} și J_{zz} sunt deci momentele principale de inerție corespunzătoare axelor $O'x$, $O'y$ și $O'z$ și sunt extremale. Deoarece ecuația canonică în polul O' este unică, rezultă că în orice pol există un singur elipsoid de inerție, deci un unic sistem ale cărui axe sunt axe principale de inerție. Dacă polul O' este chiar centrul de masă G al corpului, aceste axe se numesc axe principale centrale de inerție iar momentele de inerție corespunzătoare lor se numesc momente principale centrale de inerție.

Determinarea direcțiilor axelor principale de inerție și a momentelor principale de inerție se face folosind procedura de obținere a ecuației canonice a elipsoidului. Astfel, valorile proprii ale matricii asociate ecuației elipsoidului raportată la reperul $R'(O', \bar{i}', \bar{j}', \bar{k}')$ sunt coeficienții J_{xx}, J_{yy} și J_{zz}.

Această matrice coincide cu matricea de inerție $J_{O'}$, prin urmare momentele principale de inerție sunt tocmai valorile proprii ale acestei matrici.

Deoarece matricea de inerție este simetrică, valorile proprii sunt reale iar vectorii proprii corespunzători valorilor proprii distincte sunt ortogonali. Vectorii proprii ne furnizează direcțiile axelor elipsoidului de inerție deci direcțiile axelor principale de inerție.

Valorile proprii λ_i $i=\overline{1,3}$ sunt soluțiile ecuației

$$\det\left(J_{O}' - \lambda E_3\right) = 0$$

adică

$$\begin{vmatrix} J_{xx}' - \lambda & -J_{xy}' & -J_{xz}' \\ -J_{xy}' & J_{yy}' - \lambda & -J_{yz}' \\ -J_{zx}' & -J_{zy}' & J_{zz}' - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

unde E_3 este matricea unitate de ordinul 3.

Vectorii proprii sunt soluțiile ecuațiilor

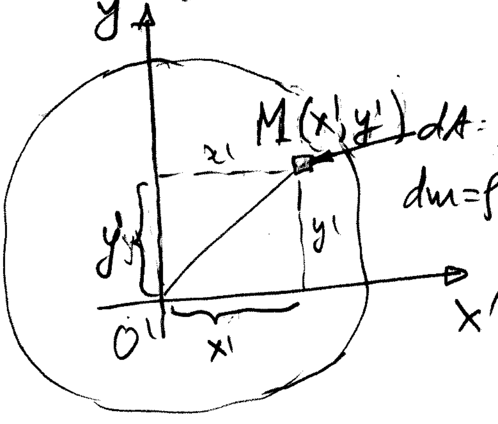
$$\left(J_{O'}' - \lambda_i E\right) X_i = 0 \quad i=\overline{1,3}$$

unde X_i $i=\overline{1,3}$ este matricea coloană a necunoscutelor adică a componentelor fiecărui vector propriu.

Valorile proprii și vectorii proprii se pot calcula cu ajutorul programelor de calcul dedicate, cum ar fi, de exemplu Mathcad, unde, comenzile sunt eigenvals(J) și eigenvecs(J).

Cazul particular al plăcilor plane omogene

Se consideră o placă plană omogenă având aria $A[m^2]$ și densitatea de suprafață $\rho_A^0 \left[\frac{kg}{m^2}\right]$. Se atașează un reper $R'(O', \bar{i}, \bar{j}, \bar{k})$ în raport cu care se definesc următoarele momente de inerție mecanice



$$J'_{xx} = \int_{(M)} y'^2 dm = \int_{(A)} y'^2 \rho_A^0 dA = \rho_A^0 \int_{(A)} y'^2 dA = \rho_A^0 I'_{xx}$$

$$J'_{yy} = \int_{(M)} x'^2 dm = \int_{(A)} x'^2 \rho_A^0 dA = \rho_A^0 \int_{(A)} x'^2 dA = \rho_A^0 I'_{yy}$$

$$J'_{zz} = \int_{(M)} (x'^2 + y'^2) dm = \int_{(A)} (x'^2 + y'^2) \rho_A^0 dA = \rho_A^0 \int_{(A)} (x'^2 + y'^2) dA = \rho_A^0 I'_{zz}$$

$$J'_{xy} = \int_{(M)} x'y' dm = \int_{(A)} x'y' \rho_A^0 dA = \rho_A^0 \int_{(A)} x'y' dA = \rho_A^0 I'_{xy}$$

$J'_{xz} = \int_{(M)} x'z' dm = 0$ (se consideră că placa are grosime neglijabilă deci $z' = 0$)

$J'_{yz} = \int y'z' dm = 0$

De regulă, în inginerie se lucrează cu corpuri omogene și, din acest motiv, se vor folosi momentele de inerție geometrice. Acestea sunt

$$I'_{xx} = \int_{(A)} y'^2 dA \qquad I'_{xy} = \int_{(A)} x'y' dA$$

$$I_{yz} = \int_{(A)} y'z' dA = 0$$

$$I'_{yy} = \int_{(A)} x'^2 dA \qquad I_{xz} = \int_{(A)} x'z' dA = 0$$

$$I'_{zz} = \int_{(A)} (x'^2 + y'^2) dA = \int_{(A)} x'^2 dA + \int_{(A)} y'^2 dA = I'_{xx} + I'_{yy}$$

Se observă că, în cazul plăcilor plane, axa $O'z'$ este întotdeauna axă principală de inerție. Matricea de inerție în polul O' este

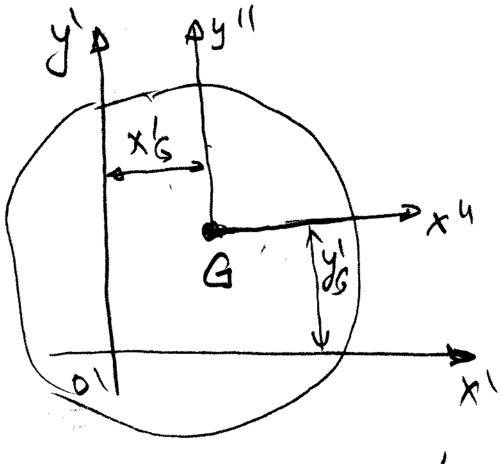
$$\mathbb{I}_{O'} = \begin{bmatrix} I'_{xx} & -I'_{xy} & 0 \\ -I'_{xy} & I'_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I'_{zz} \end{bmatrix}.$$

Dacă se ține cont de faptul că $I'_{zz} = I'_{xx} + I'_{yy}$, atunci se poate considera următoarea formă a matricii de inerție în polul O'

$$\mathbb{I}_{O'} = \begin{bmatrix} I'_{xx} & -I'_{xy} \\ -I'_{xy} & I'_{yy} \end{bmatrix}$$

Variația momentelor de inerție la translația axelor

Variația momentelor de inerție la translația axelor în cazul plăcilor plane omogene se deduce particularizând formulele de la cazul spațial.



Se alege un reper $R'(O', i', j')$ cu polul într-un punct oarecare și un $R''(G, i'', j'')$ cu polul în centrul de masă G al plăcii. Coordonatele centrului de masă x'_G și y'_G coincid cu distanțele dintre axele celor două repere. Teorema lui Steiner conduce la formulele

$$I'_{xx} = I''_{xx} + A {y'_G}^2$$

$$I'_{yy} = I''_{yy} + A {x'_G}^2$$

Variația la translație a momentului de inerție centrifugal este:

$$I'_{xy} = I''_{xy} + A x'_G y'_G$$

Și în acest caz se poate scrie o relație matricială bazată pe matricea antisimetrică

$$\hat{r}_G = \begin{bmatrix} 0 & 0 & y'_G \\ 0 & 0 & -x'_G \\ -y'_G & x_G & 0 \end{bmatrix}$$

de forma

$$I''_G = I'_{O'} - A\,\hat{r}'_G\, r'^{T}_G$$

unde $I_{O'}$ este matricea 3x3 pe care am prezentat-o anterior.

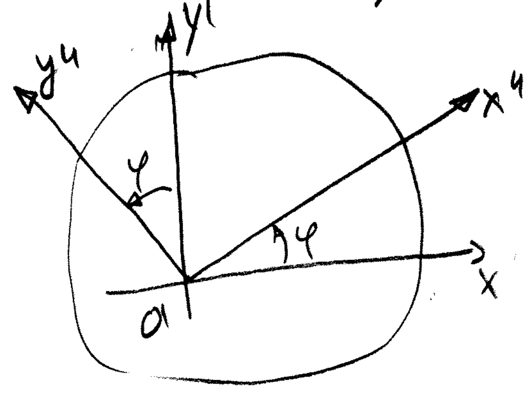
O relatie similară se poate scrie pentru cazul când $I_{O'}$ este matricea 2x2 prezentată anterior, caz în care se folosește matricea

$$\hat{r}'_G = \begin{bmatrix} y'_G & 0 \\ x'_G & 0 \end{bmatrix}.$$

Variatia momentelor de inertie la rotatia axelor

Se consideră o placă plană omogenă de care este atașat un reper $R(O', x', y')$ în raport cu care se cunoaște matricea de inertie

$$I_{O'} = \begin{bmatrix} I'_{xx} & -I'_{xy} & 0 \\ -I'_{xy} & I'_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I'_{zz} \end{bmatrix}.$$



Se consideră un alt reper $R''(O', i'', j'')$ rotit față de primul reper cu unghiul φ. Matricea cosinusurilor directoare este

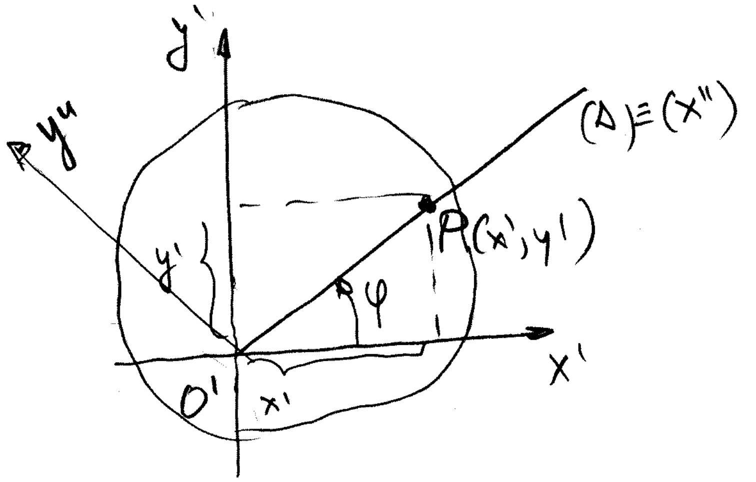
$$A = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Determinarea matricii de inerție în raport cu reperul R" se face cu o relație similară cu cea din cazul spațial:

$$\mathbb{I}_{O'}^{"} = \mathcal{A} \cdot \mathbb{I}_{O'}^{'} \cdot \mathcal{A}^T$$

Determinarea axelor principale de inerție și a momentelor principale de inerție

La fel ca și în cazul spațial, se consideră o semiaxă (Δ) care trece prin polul O' și face un unghi φ cu axa O'x'. Ea se poate roti în jurul punctului O'.



Pe axa (Δ) se consideră un punct P care este poziționat astfel încât

$$|O'P| = \frac{C}{\sqrt{I_\Delta(\varphi)}}$$

unde C este o constantă pozitivă neprecizată. Deoarece momentul de inerție axial $I_\Delta(\varphi)$ este o mărime strict pozitivă, segmentul |O'P| nu poate avea lungime infinită. Dacă presupunem că axa (Δ) ar fi axa O'x" a unui reper R"(O', $\bar{i}"$, $\bar{j}"$) rotit cu unghiul φ față de reperul R'(O', $\bar{i}'$, $\bar{j}'$)

atunci, din relația matriceală, rezultă relația de calcul:

$$I_\Delta(\varphi) = I''_{xx} = I'_{xx}\cos^2\varphi + I'_{yy}\sin^2\varphi - 2I'_{xy}\sin\varphi\cos\varphi$$

Din figură se deduc relațiile:

$$\cos\varphi = \frac{x'}{|O'P|} \qquad \sin\varphi = \frac{y'}{|O'P|}.$$

Se înlocuiesc aceste valori în $I_\Delta(\varphi)$ și se obține

$$\frac{c^2}{|O'P|^2} = I'_{xx}\frac{x'^2}{|O'P|^2} + I'_{yy}\frac{y'^2}{|O'P|^2} - 2I'_{xx}\frac{x'y'}{|O'P|^2}$$

care conduce, după simplificări, la relația:

$$I'_{xx}x'^2 + I'_{yy}y'^2 - 2I'_{xy}x'y' = c^2$$

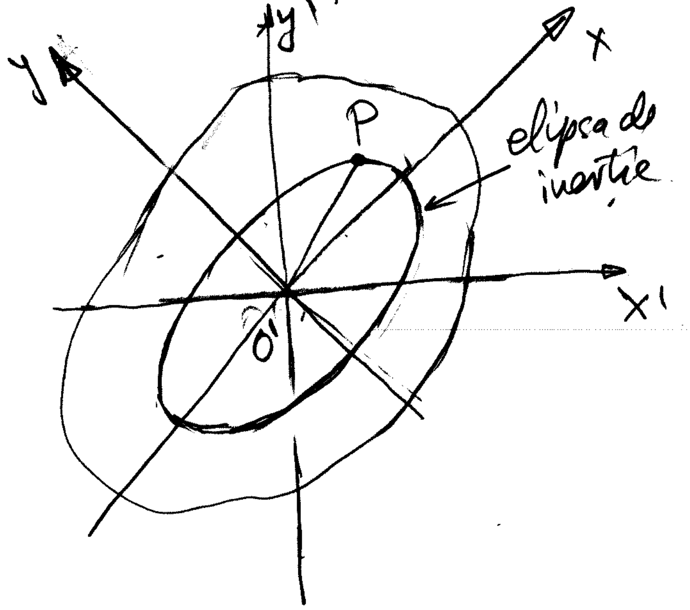
Aceasta este ecuația unei conice cu centru fără puncte la infinit deci a unei elipse numită elipsa de inerție în polul O'.

În raport cu un reper $O'xy\ (R(O';\bar{\imath},\bar{\jmath}))$ ale cărui axe coincid cu axele elipsei, ecuația elipsei este

$$I_{xx}x^2 + I_{yy}y^2 = C^2$$

care constituie ecuația canonică a elipsei de inerție în polul O'.

Din această ecuație rezultă că termenul $I_{xy}=0$, deci axele reperului $R(O',\bar{i},\bar{j})$ care coincid cu axele elipsei sunt axe principale de inerție și, evident, momentele de inerție corespunzătoare sunt momente principale de inerție. Când segmentul $O'P$ coincide cu semiaxele elipsei adică au valori extreme, din formula $|O'P| = \dfrac{c}{\sqrt{J_{\Delta}(e)}}$ rezultă că



momentele principale de inerție au valori extreme, adică atunci când $O'P$ coincide cu semiaxa mică, momentul principal de inerție este maxim și când $O'P$ coincide cu semiaxa mare momentul principal de inerție minim.

Procedeul de determinare a formei canonice a ecuației elipsei de inerție ne furnizează direcțiile axelor principale de inerție și momentele principale de inerție. Astfel, valorile proprii ale matricii de inerție

$$\mathbb{I}'_{O'} = \begin{bmatrix} I'_{xx} & -I'_{xy} \\ -I'_{xy} & I'_{yy} \end{bmatrix}$$

sunt tocmai momentele principale de inerție iar vectorii proprii corespunzători ne arată direcțiile axelor principale de inerție. Procedeul este exact ca în cazul spațial.

Un alt procedeu se bazează pe faptul că $I_\Delta(\varphi)$ este extrem pe direcțiile axelor principale de inerție. Valorile unghiului φ pentru care $I_\Delta(\varphi)$ este extrem (maxim sau minim) sunt rădăcinile derivatei, adică soluțiile ecuației: $\dfrac{dI_\Delta(\varphi)}{d\varphi}=0$

$$\frac{dI_\Delta(\varphi)}{d\varphi}=-2I'_{xx}\cos\varphi\sin\varphi+2I'_{yy}\sin\varphi\cos\varphi-2I'_{xy}\cos^2\varphi+$$
$$+2I'_{xy}\sin^2\varphi=(I'_{yy}-I'_{xx})\sin 2\varphi-2I'_{xy}\cos 2\varphi$$

Ecuația $\dfrac{dI_\Delta(\varphi)}{d\varphi}=0$ devine

$$(I'_{xy}-I'_{xx})\sin 2\varphi=2I'_{xy}\cos 2\varphi$$

de unde

$$\operatorname{tg}2\varphi=\frac{2I'_{xy}}{I'_{yy}-I'_{xx}}$$

cu soluția

$$\boxed{\varphi=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{2I'_{xy}}{I'_{yy}-I'_{xx}}+k\frac{\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}}$$

Pentru $k=0$ se obține direcția $\varphi_0 = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{2I'_{xy}}{I'_{yy}-I'_{xx}} \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ a primei axe principale de inerție.

Pentru $k=1$ se obține direcția celeilalte axe principale de inerție

$$\varphi_1 = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{2I'_{xy}}{I'_{yy}-I'_{xx}} + \frac{\pi}{2} = \varphi_0 + \frac{\pi}{2},$$

care este perpendiculară pe prima axă.

Valorile momentelor principale de inerție corespunzătoare acestor axe, sunt $I_\Delta(\varphi_0) = I_{xx}$ și $I_\Delta(\varphi_1) = I_{yy}$.

Determinarea momentelor principale de inerție se mai poate face înlocuind în expresia lui $I_\Delta(\varphi)$;

$$\cos^2\varphi = \frac{1+\cos 2\varphi}{2}, \quad \sin^2\varphi = \frac{1-\cos 2\varphi}{2}, \quad 2\sin\varphi\cos\varphi = \sin 2\varphi$$

rezultând

$$I_{\Delta\varphi} = I'_{xx}\frac{1+\cos 2\varphi}{2} + I'_{yy}\frac{1-\cos 2\varphi}{2} - I'_{xy}\sin 2\varphi =$$

$$= \frac{1}{2}\left[I'_{xx} + I'_{yy} - \cos 2\varphi\left(I'_{yy} - I'_{xx} + 2I'_{xy}\operatorname{tg}2\varphi\right)\right] =$$

Folosind relația $\cos 2\varphi = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2(2\varphi)}}$ pentru $\varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, adică ne referim la soluția φ_0.

Se obține:

$$I_\Delta(\varphi_0) = \frac{1}{2}\left[I'_{xx} + I'_{yy} - \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2(2\varphi)}}\left(I'_{yy} + I'_{xx} + 2I'_{xy}\operatorname{tg}2\varphi\right)\right]$$

Se înlocuieşte $tg 2\varphi$ cu expresia determinată anterior şi rezultă

$$I_\Delta(\varphi_0)=\frac{1}{2}\left[I'_{xx}+I'_{yy}-\frac{1}{\sqrt{1+\frac{4I'^2_{xy}}{(I'_{yy}-I'_{xx})^2}}}\left(I'_{yy}-I'_{xx}+\frac{4I'^2_{xy}}{I'_{yy}-I'_{xx}}\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\left[I'_{xx}+I'_{yy}-\frac{|I'_{yy}-I'_{xx}|}{I'_{yy}-I'_{xx}}\sqrt{(I'_{yy}-I'_{xx})^2+4I'^2_{xy}}\right]$$

(1) Dacă $I'_{yy}-I'_{xx}>0$ adică $I'_{yy}>I'_{xx}$, atunci

$$I_\Delta(\varphi_0)=\frac{1}{2}\left[I'_{xx}+I'_{yy}-\sqrt{(I'_{yy}-I'_{xx})^2+4I'^2_{xy}}\right]=I_{minim}$$

$$I_\Delta(\varphi_1)=\frac{1}{2}\left[I'_{xx}+I'_{yy}+\sqrt{(I'_{yy}-I'_{xx})^2+4I'^2_{xy}}\right]=I_{maxim}$$

(2) Dacă $I'_{yy}-I'_{xx}<0$ adică $I'_{yy}<I'_{xx}$, atunci

$$I_\Delta(\varphi_0)=\frac{1}{2}\left[I'_{xx}+I'_{yy}+\sqrt{(I'_{yy}-I'_{xx})^2+4I'^2_{xy}}\right]=I_{max}$$

$$I_\Delta(\varphi_1)=\frac{1}{2}\left[I'_{xx}+I'_{yy}-\sqrt{(I'_{yy}-I'_{xx})^2+4I'^2_{xy}}\right]=I_{min}$$

În practică, se calculează I_{max} şi I_{min} cu formula

$$I_{max,min}=\frac{1}{2}\left[I'_{xx}+I'_{yy}\pm\sqrt{(I'_{yy}-I'_{xx})^2+4I'^2_{xy}}\right]$$

şi se atribuie cele două valori conform algoritmului de mai sus.

Trasarea elipsei de inerție.

Se definesc lungimile:

$$i_x = \sqrt{\frac{I_{xx}}{A}}\,[m] \quad i_y = \sqrt{\frac{I_{yy}}{A}}\,[m]$$ unde A este aria plăcii.

denumite raze de girație sau raze de inerție.

Se definește constanta C ca fiind

$$C = i_x i_y \sqrt{A}$$

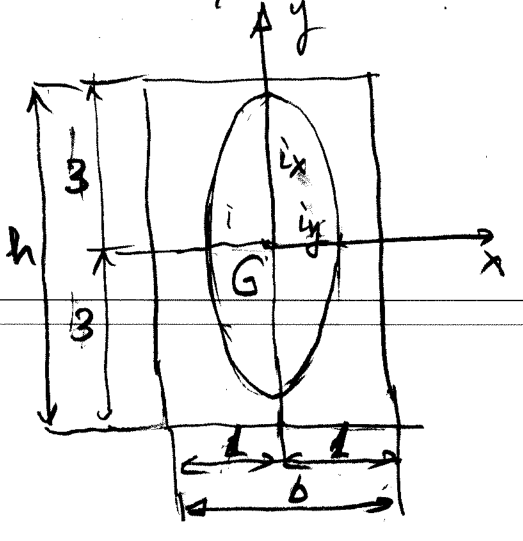
Înlocuind în ecuația canonică a elipsei pe I_{xx}, I_{yy} și C, se obține ecuația:

$$x^2 A i_x^2 + y^2 A i_y^2 = i_x^2 i_y^2 A$$

sau

$$\boxed{\frac{x^2}{i_y^2} + \frac{y^2}{i_x^2} = 1}$$ unde i_x, i_y sunt semiaxele elipsei.

Aceasta este ecuația elipsei de inerție în polul O'. De exemplu, pentru o placă dreptunghiulară de dimensiuni $2a = 6$ și $2b = 2$ au loc relațiile:



$$I_{xx} = \frac{b h^3}{12} = \frac{2 \cdot 6^3}{12} = 36\ m^4$$

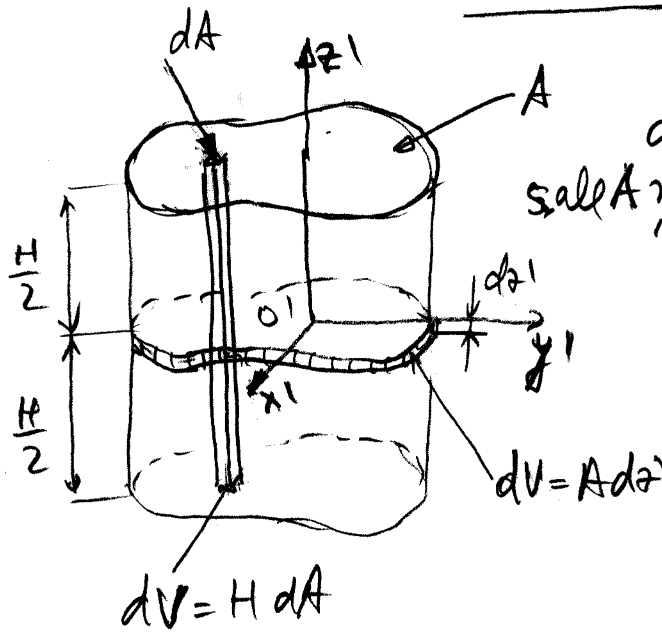
$$I_{yy} = \frac{b^3 h}{12} = \frac{2^3 \cdot 6}{12} = 4\ m^4$$

$$A = b \cdot h = 2 \cdot 6 = 12\ m^2$$

$$i_x = \sqrt{\frac{I_{xx}}{A}} = \sqrt{\frac{36}{12}} = \sqrt{3} \simeq 1{,}73 \qquad \frac{x^2}{\frac{1}{3}} + \frac{y^2}{3} = 1$$

$$i_y = \sqrt{\frac{I_{yy}}{A}} = \sqrt{\frac{4}{12}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \simeq 0{,}57$$

Momentele de inerție ale corpurilor cilindrice și prismatice drepte cu secțiune transversală oarecare



Se consideră corpul din desen având masa M, aria secțiunii transversale A și înălțimea H. Planul de simetrie materială se alege ca plan O'x'y'. Axa O'z' este perpendiculară pe el și deci este axă principală de inerție, cu alte cuvinte $J'_{xz}=J'_{yz}=0$

Se vor considera două tipuri de volume infinit mici. Un prim volum este cuprins între două plane paralele între care există distanța dz':

$$dV = A\,dz'$$

Un al doilea volum este o prismă dreaptă având înălțimea H și aria dA, rezultând

$$dV = H\,dA$$

Aceste volume au masa

$$dm = \rho_V^0\, dV$$

unde $\rho_0^V = \frac{M}{A\cdot H}\ \frac{kg}{m^3}$ este densitatea volumică a corpului.

Momentele de inerție în raport cu reperul ales sunt:

$$J'_{xx} = \int_{(M)} (y'^2 + z'^2)\,dm = \int_{(V)} y'^2 \rho_V^0\, dV + \int_{(V)} z'^2 \rho_V^0\, dV =$$

$$= \rho_V^0 \int_{(A)} y'^2 H\, dA + \rho_V^0 \int_{(A)} z'^2 A\, dz' = \rho_V^0 H \int_{(A)} y'^2 dA + \rho_V^0 A \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} z'^2 dA =$$

$$= \rho_V^0 H \cdot I'_{xx} + \rho_V^0 A \frac{z'^3}{3}\Big|_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} = \rho_V^0 H I'_{xx} + \rho_V^0 A \frac{H^3}{12} =$$

$$= \frac{M}{AH} \cdot H I'_{xx} + \frac{M}{AH} A \frac{H^3}{12} = \frac{M}{A} I'_{xx} + M \frac{H^2}{12}$$

$$J'_{yy} = \int_{(M)} (x'^2 + z'^2)\, dm = \int_{(V)} x'^2 \rho_V^0 dV + \int_{(V)} z'^2 \rho_V^0 dV =$$

$$= \rho_V^0 \int_{(A)} x'^2 H\, dA + \rho_V^0 \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} z'^2 A\, dz' = \rho_V^0 H I'_{yy} + \rho_V^0 A \frac{z'^3}{3}\Big|_{-H/2}^{\frac{H}{2}} =$$

$$= \frac{M}{AH} H I'_{yy} + \frac{M}{AH} \cdot A \cdot \frac{H^3}{12} = \frac{M}{A} I'_{yy} + M \frac{H^2}{12}$$

$$J'_{zz} = \int_{(M)} (x'^2 + y'^2)\, dm = \int_{(V)} x'^2 \rho_V^0 dV + \int_{(V)} y'^2 \rho_V^0 dV =$$

$$= \rho_V^0 \int_{(A)} x'^2 H\, dA + \rho_V^0 \int_{(A)} y'^2 H\, dA = \frac{M}{AH} H \int_{(A)} x'^2 dA + \frac{M}{AH} \cdot H \int_{(A)} y'^2 dA =$$

$$= \frac{M}{A} \left(I'_{xx} + I'_{yy} \right)$$

$$J'_{xy} = \int_{(M)} x'y'\, dm = \int_{(V)} x'y' \rho_V^0 dV = \rho_V^0 \int_{(A)} x'y' H\, dA =$$

$$= \frac{M}{HA} H \int_{(A)} x'y'\, dA = \frac{M}{A} I'_{xy}.$$

In relațiile de mai sus, I'_{xx}, I'_{yy} și I'_{xy} sunt momentele de inerție geometrice ale secțiunii transversale considerată ca placă plană omogenă.

Se pot deduce relații pentru calculul momentelor de inerție geometrice ale corpului:

$$J'_{xx} = \frac{M}{AH} H I'_{xx} + \frac{M}{AH} \cdot \frac{AH^3}{12} = \frac{M}{AH}\left(H I'_{xx} + \frac{AH^3}{12}\right) =$$

$$= \rho_V^0 \underbrace{\left(H I'_{xx} + \frac{AH^3}{12}\right)}_{I'_{xx\,corp}} = \rho_V^0\, I'_{xx\,corp}$$

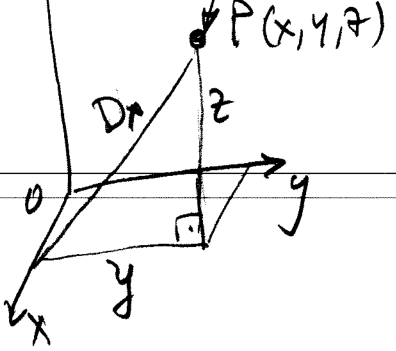
$$J'_{yy} = \frac{M}{AH} \cdot H I'_{yy} + \frac{M}{AH} \cdot \frac{AH^3}{12} = \frac{M}{AH}\left(H I'_{yy} + \frac{AH^3}{12}\right) =$$

$$= \rho_V^0 \underbrace{\left(H I'_{yy} + \frac{AH^3}{12}\right)}_{I'_{yy\,corp}} = \rho_V^0\, I'_{yy\,corp}$$

$$J'_{zz} = \frac{M}{AH} H(I'_{xx} + I'_{yy}) = \rho_V^0 \underbrace{H(I'_{xx} + I'_{yy})}_{I'_{zz\,corp}} = \rho_V^0\, I'_{zz\,corp}$$

$$J'_{xy} = \frac{M}{AH} H I'_{xy} = \rho_V^0 \underbrace{H I'_{xy}}_{I'_{xy\,corp}} = \rho_V^0\, I'_{xy\,corp}.$$

Momentele de inerție ale unui punct material



Fie un punct material P de masă m care are coordonatele x, y, z în raport cu un reper $R(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Momentele de inerție axiale și centrifugale ale punctului sunt

$$J_{xx} = (y^2 + z^2)m = D_x^2 m$$

$$J_{yy} = (x^2 + z^2)m = D_y^2 m$$

$$J_{zz} = (x^2 + y^2)m = D_z^2 m$$

$$J_{xy} = xym$$

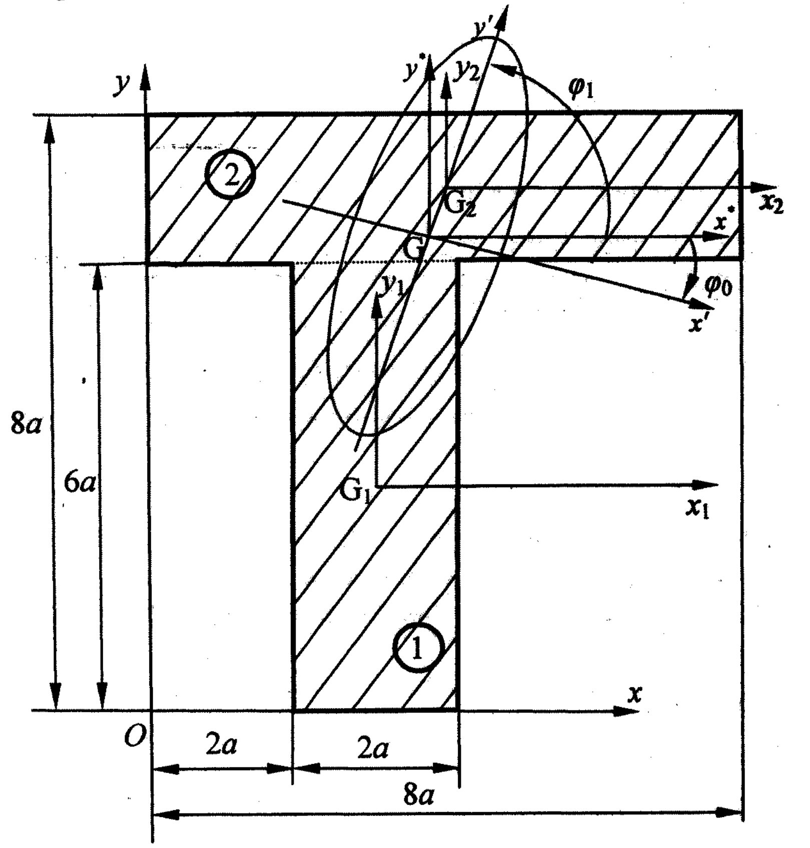
$$J_{yz} = yzm$$

$$J_{xz} = xzm$$

unde D_x, D_y și D_z notează distanța de la punctul P la axele Ox, Oy și Oz ale reperului.

EXEMPLU DE CALCUL A AXELOR PRINCIPALE CENTRALE DE IENERŢIE ŞI A MOMENTELOR PRINCIPALE CENTRALE DE INERŢIE LA O PLACĂ PLANĂ OMOGENĂ

Se consideră placa plană omogenă din desen formată din două zone dreptunghiulare. Să se determine axele principale centrale de inerţie şi momentele principale centrale de inerţie.



1. Se calculează coordonatele centrului de masă G al plăcii.

$$1.\begin{cases} x_{G_1} = 3a \\ y_{G_1} = 3a \\ A_1 = 12a^2 \end{cases} \quad 2.\begin{cases} x_{G_2} = 4a \\ y_{G_2} = 7a \\ A_2 = 16a^2 \end{cases}$$

$$x_G = \frac{x_{G_1}A_1 + x_{G_2}A_2}{A_1 + A_2} = 3{,}571a$$

$$y_G = \frac{y_{G_1}A_1 + y_{G_2}A_2}{A_1 + A_2} = 5{,}285a$$

2. Se calculează momentele de inerţie ale fiecărei zone în raport cu reperele cu polul în centrul de masă al zonei.

$$1.\begin{cases} I^{(1)}_{x_1x_1} = \dfrac{2a(6a)^3}{12} = 36\,a^4 \\ I^{(1)}_{y_1y_1} = \dfrac{(2a)^3 6a}{12} = 4\,a^4 \\ I^{(1)}_{x_1y_1} = 0 \end{cases}$$

$$2.\begin{cases} I^{(2)}_{x_1x_1} = \dfrac{8a(2a)^3}{12} = 5{,}33a^4 \\ I^{(2)}_{y_1y_1} = \dfrac{(8a)^3 2a}{12} = 85{,}33a^4 \\ I^{(2)}_{x_1y_1} = 0 \end{cases}$$

3. Se calculează momentele de inerţie ale dreptunghiurilor în raport cu reperul având polul în punctul O.

$$1.\begin{cases} I^{(1)}_{xx} = I^{(1)}_{x_1x_1} + A_1 y_{G_1}^2 = 144a^2 \\ I^{(1)}_{yy} = I^{(1)}_{y_1y_1} + A_1 x_{G_1}^2 = 112a^4 \\ I^{(1)}_{xy} = I^{(1)}_{x_1y_1} + A_1 x_{G_1} y_{G_1} = 108a^4 \end{cases} \quad 2.\begin{cases} I^{(2)}_{xx} = I^{(2)}_{x_1x_1} + A_2 y_{G_2}^2 = 789{,}33a^2 \\ I^{(2)}_{yy} = I^{(2)}_{y_1y_1} + A_2 x_{G_2}^2 = 341{,}33a^4 \\ I^{(2)}_{xy} = I^{(2)}_{x_2y_2} + A_2 x_{G_2} y_{G_2} = 448a^4 \end{cases}$$

4. Se calculează momentele de inerţie ale plăcii în raport cu reperul având polul în punctul O.

$$I_{xx} = I^{(1)}_{xx} + I^{(2)}_{xx} = 933{,}33a^4$$

$$I_{yy} = I^{(1)}_{yy} + I^{(2)}_{yy} = 453{,}33a^4$$

$$I_{xy} = I^{(1)}_{xy} + I^{(2)}_{xy} = 556a^4$$

5. Se calculează momentele de inerţie ale plăcii în raport cu reperul având polul în punctul G.

$$I^*_{xx} = I_{xx} - Ay_G^2 = 151{,}05a^4$$

$$I^*_{yy} = I_{yy} - Ax_G^2 = 96{,}19a^4$$

$$I^*_{xy} = I_{xy} - Ax_G y_G = 27{,}43a^4$$

6. Se calculează unghiurile pe care le fac axele principale de inerţie cu axele reperului x^*Gy^*.

$$\varphi_0 = \frac{1}{2} arctg \frac{2I^*_{xy}}{I^*_{yy} - I^*_{xx}} = \frac{1}{2} arctg \frac{2 \cdot 27{,}43a^4}{96{,}19a^4 - 151{,}05a^4} = -22^o 30' 11{,}94'', \quad \varphi_1 = \varphi_0 + \frac{\pi}{2} = 67^0 29' 48{,}06''$$

7. Se determină momentele principale de inerţie ale plăcii

$$I'_{xx} = I^*_{xx}\cos^2\varphi_0 + I^*_{yy}\sin^2\varphi_0 - 2I^*_{xy}\sin\varphi_0\cos\varphi_0 = 162{,}41a^4$$

$$I'_{yy} = I^*_{xx}\cos^2\varphi_1 + I^*_{yy}\sin^2\varphi_1 - 2I^*_{xy}\sin\varphi_1\cos\varphi_1 = 84{,}83a^4$$

8. Ecuația elipsei de inerție

$$\frac{x'^2}{i_y^2}+\frac{y'^2}{i_x^2}=1 \text{ unde } i_x=\sqrt{\frac{I'_{xx}}{A}} \text{ și } i_y=\sqrt{\frac{I'_{yy}}{A}}\text{. Rezultă } \frac{x'^2}{(1{,}74)^2}+\frac{y'^2}{(2{,}41)^2}=1$$

O altă metodă pentru determinarea momentelor principale de inerție constă în calcularea momentelor de inerție extremale corespunzătoare axelor principale de inerție cu formula

$$I_{\max,\min}=\frac{1}{2}\left[I^*_{xx}+I^*_{yy}\pm\sqrt{(I^*_{yy}-I^*_{xx})+4(I^*_{xy})^2}\right]$$

Atribuirea acestor momente de inerție celor două axe principale de inerție se face astfel:

a) Dacă $I^*_{yy} > I^*_{xx}$ atunci axei corespunzătoare unghiului φ_0 (axa notată Gx' în acest caz) i se atribuie momentul minim iar axei corespunzătoare unghiului φ_1 (axa notată Gy' în acest caz) i se atribuie momentul maxim

b) Dacă $I^*_{yy} < I^*_{xx}$ atunci axei corespunzătoare unghiului φ_0 (axa notată Gx' în acest caz) i se atribuie momentul maxim iar axei corespunzătoare unghiului φ_1 (axa notată Gy' în acest caz) i se atribuie momentul minim.

În cazul de față $I^*_{yy} < I^*_{xx}$ deci axei Gx' i se atribuie momentul maxim așa cum a rezultat și prin aplicarea primei metode.

O a treia metodă de determinare a momentelor principale de inerție și a direcțiilor axelor principale de inerție se bazează pe faptul că valorile proprii ale matricii de inerție sunt chiar momentele principale de inerție iar vectorii proprii corespunzători acestor valori proprii ne indică direcțiile axelor principale de inerție. În acest caz se folosește programul Mathcad pentru a efectua aceste calcule.

Matricea de inerție în raport cu reperul $x^*G\,y^*$ (scrisă fără factorul a^4) este:

$$A := \begin{pmatrix} 151.05 & -27.43 \\ -27.43 & 96.19 \end{pmatrix}.$$

Valorile proprii se determină cu instrucțiunea *eigenvals*(A): $\text{eigenvals}(A) = \begin{pmatrix} 84.828 \\ 162.412 \end{pmatrix}$

Componentele acestei matrici sunt momentele principale de inerție.

Direcția axei principale de inerție corespunzătoare valorii proprii 84.828a^4 este direcția vectorului propriu asociat acestei valori proprii și se determină cu instrucțiunea *eigenvec*(A, 84.828):

$$\text{eigenvec}(A, 84.828) = \begin{pmatrix} 0.383 \\ 0.924 \end{pmatrix}$$

Se obțin componentele versorului direcției corespunzătoare acestei valori a momentului principal de inerție care are expresia $\vec{v}_1 = 0.383\vec{i} + 0.924\vec{j}$ cu $|\vec{v}_1| = 1$.

Unghiul pe care acest vector îl face cu axa Gx^* este dat de $\text{atan}\left(\frac{0.924}{0.383}\right) = \begin{pmatrix} 67 \\ 29 \\ 9.194 \end{pmatrix}$ DMS adică este $67^0 29' 9{,}1946''$.

Direcția axei principale de inerție corespunzătoare valorii proprii 162.412a^4 este direcția vectorului propriu asociat acestei valori proprii. Componentele acestui vector propriu sunt:

$$\text{eigenvec}(A, 162.412) = \begin{pmatrix} 0.924 \\ -0.383 \end{pmatrix}$$

Vectorul propriu este deci $\vec{v}_2 = 0.924\vec{i} - 0.383\vec{j}$ cu $|\vec{v}_2| = 1$

Unghiul pe care acest vector îl face cu axa Gx^* este dat de

$$\text{atan}\left(\frac{-0.383}{0.924}\right) = \begin{pmatrix} -22 \\ -30 \\ -50.806 \end{pmatrix} \text{DMS}$$

adică este $-22^0 30' 50{,}806''$. Cele două direcții pot căpăta acum notațiile dorite de utilizator care pot fi corespunzătoare cu cele de mai sus (Gy' și respectiv Gx') sau pot fi altele. Diferențele de ordinul secundelor în raport cu valorile obținute mai sus se reduc dacă se consideră mai multe zecimale ale valorilor ce intră în calcule.