Metoda cinetostatică de rezolvare a problemelor de dinamica sistemelor
(Metoda ecuațiilor de echilibru dinamic ale lui d'Alembert)

Una dintre cele mai folosite metode de rezolvare a problemelor de dinamica sistemelor este metoda cinetostatică denumită și metoda ecuațiilor de echilibru dinamic ale lui d'Alembert.

Avantajele metodei: este simplu de aplicat, se acceptă existența forțelor de frecare și se obțin, pe lângă legile de mișcare, reacțiunile legăturilor atât de necesare în procesul de proiectare a sistemelor mecanice.

Aplicarea metodei presupune îndeplinirea aplicării următorilor pași:

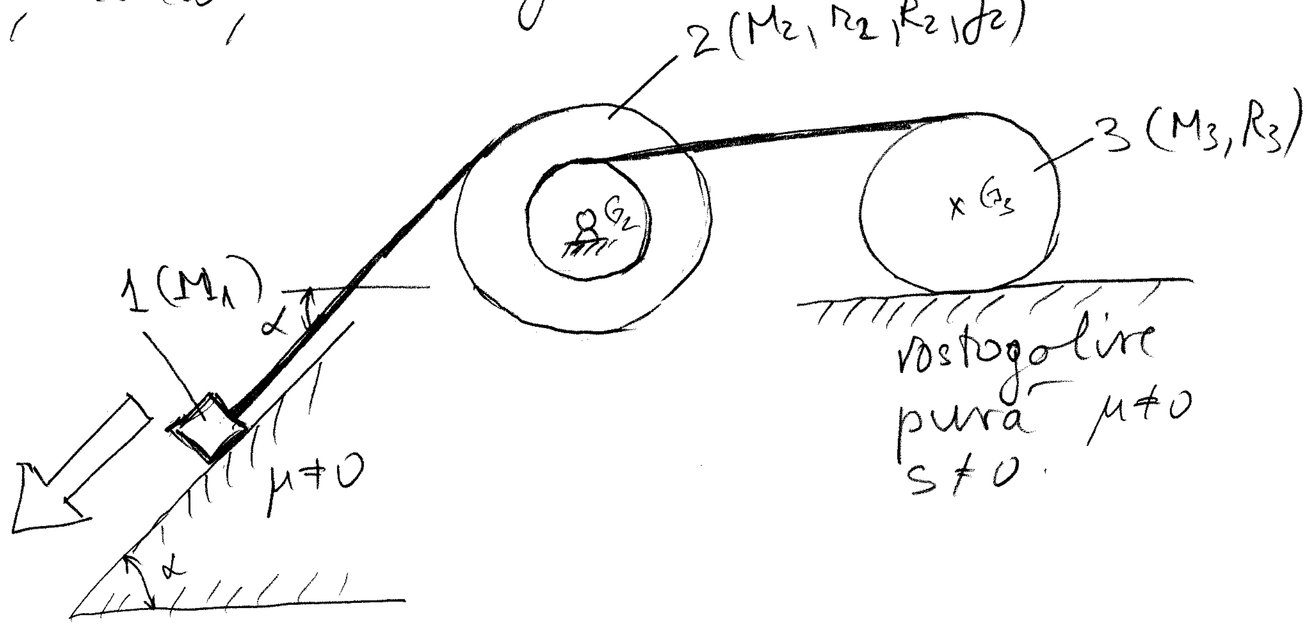
1. Se desenează separat fiecare corp din sistem (ca la statică).
2. Se desenează toate forțele date și de legătură care acționează asupra fiecărui corp (ca la statică).

3. Se desenează forțele și momentele de inerție care acționează asupra fiecărui corp.
4. Se alege câte un reper solidar cu fiecare corp (ca la statică), de regulă cu polul în centrul de masă al corpului.
5. Se scriu ecuațiile scalare de echilibru dinamic ale lui d'Alembert, înlocuindu-se forțele și momentele de inerție cu expresiile lor, pentru fiecare corp din sistem.
6. Se scriu ecuațiile de legătură cinematică și condițiile inițiale.
7. Se rezolvă sistemul de ecuații scalare de echilibru având ca necunoscute accelerații și forțe de legătură și, eventual, alte forțe, ca un sistem algebric (ca la statică).
8. Se integrează ecuațiile diferențiale ale accelerațiilor.

Faptul că multe pași sunt asemănători cu cei de la problemele de statică, justifică denumirea de metoda cinetostatică.

Pentru a înțelege modul de aplicare a metodei, se vor da în continuare câteva exemple.

Se consideră sistemul de corpuri din desen care pornește din repaos în sensul arătat de săgeată. Să se scrie ecuațiile scalare de echilibru dinamic ale lui d'Alembert și ecuațiile de legătură cinematică.

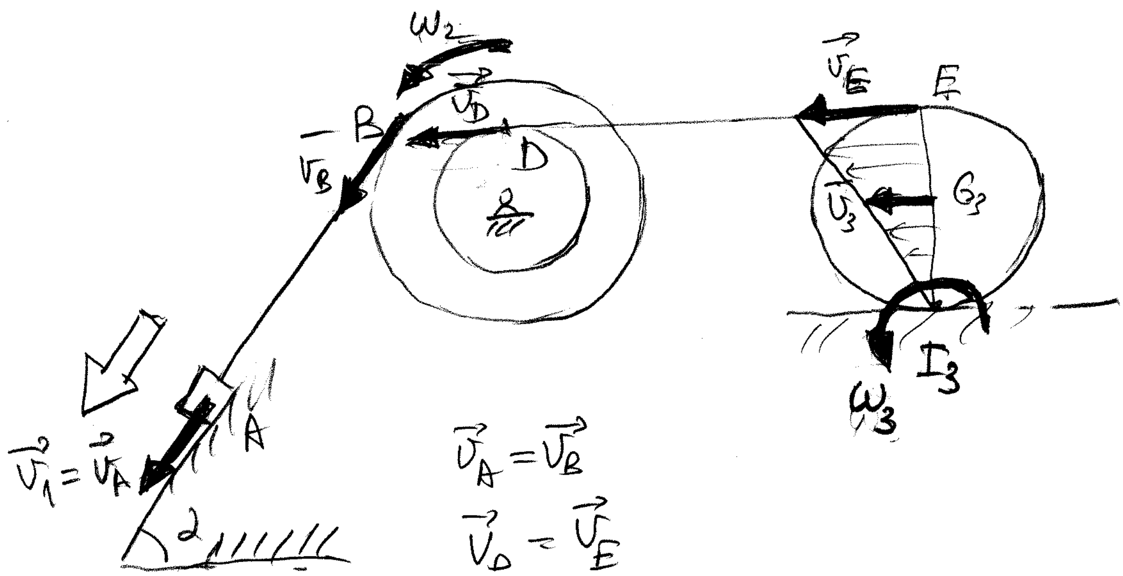


Sistemul este format din trei corpuri.
Corpul ① este un punct material de masă M_1 care, prin greutatea sa, alunecă cu frecare pe un plan înclinat cu unghiul α, punând astfel în mișcare întregul sistem.
Punctul material este prins de un fir paralel cu planul înclinat, fir ce este

înfășurat pe discul mare, de rază R_2, al unui troliu de masă M_2 și moment de inerție J_2 în raport cu axa de rotație fixă, perpendiculară în articulație pe planul figurii. (Ea este axă principală centrală de inerție.

Troliul este un corp format din două discuri fixate coaxial unul de celălalt care se rotesc simultan.

Când corpul 1 coboară pe planul înclinat, troliul se rotește spre stânga cu viteza unghiulară ω_2. Rotația troliului spre stânga face ca firul înfășurat pe discul de rază R_2 să se desfășoare iar firul dintre corpurile 2 și 3 să se înfășoare pe discul de rază r_2. Înfășurarea acestui fir provoacă deplasarea centrului de masă G_3 a discului 3, de rază R_3, către stânga, simultan cu rostogolirea pură a acestui disc pe planul orizontal. Discul 3 se rostogolește pur având viteza unghiulară ω_3 și se și translează



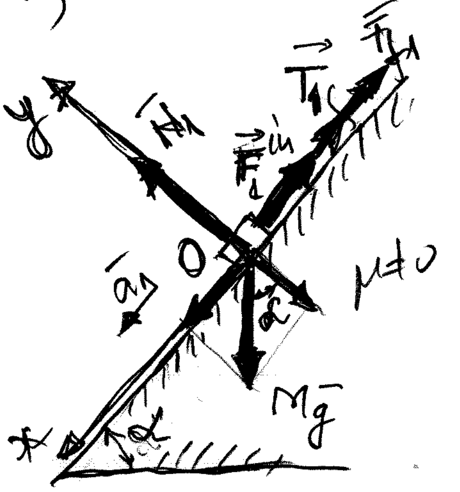
$$\vec{v}_A = \vec{v}_B$$
$$\vec{v}_D = \vec{v}_E$$

deci execută o mișcare plan-paralelă. Centrul instantaneu de rotație este I_3. Au loc relațiile

$$v_E = \omega_3 \cdot I_3E = \omega_3 \cdot 2R_3$$
$$v_{G_3} = v_3 = \omega_3 R_3 .$$

Se desenează separat corpurile împreună cu toate forțele, inclusiv forțele și momentele de inerție. Se atașează câte un reper, ales convenabil, de fiecare corp.

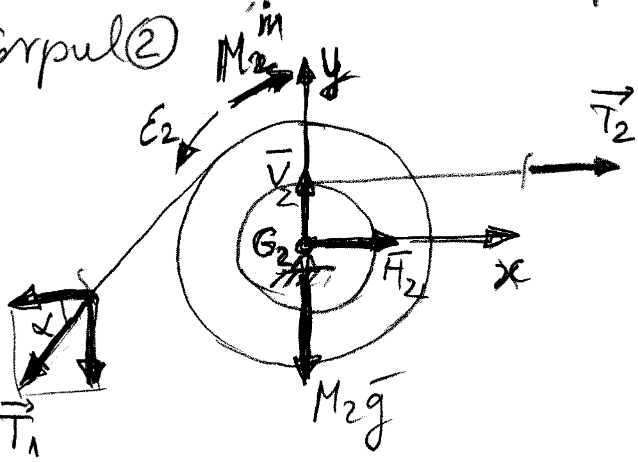
Corpul 1



$\bar{T}_1$ = tensiunea în fir
$\bar{N}_1$ = reacțiunea normală
$M\bar{g}$ = greutatea punctului
$\vec{F}_1^{in}$ = forța de inerție în sensul opus accelerației $\vec{a}_1$
$\vec{F}_1^{in} = -M_1\vec{a}_1$
$|\vec{F}_{f1}| = \mu|\bar{N}_1|$ forța de frecare de alunecare

<u>Observație</u> Se recomandă ca, în cazul planului înclinat, reperul să aibă o axă în lungul planului și una perpendiculară pe plan (ca la statică)

Corpul ②



$\overline{T}_1$ = tensiunea în fir egală și de sens opus celei desenate la corpul ① și notată la fel.

$\overline{T}_2$ = tensiunea din firul ce leagă corpul ① de corpul ②

$\overline{H}_2, \overline{V}_2$ = reacțiunile din articulație

$M_2\overline{g}$ = greutatea corpului ②

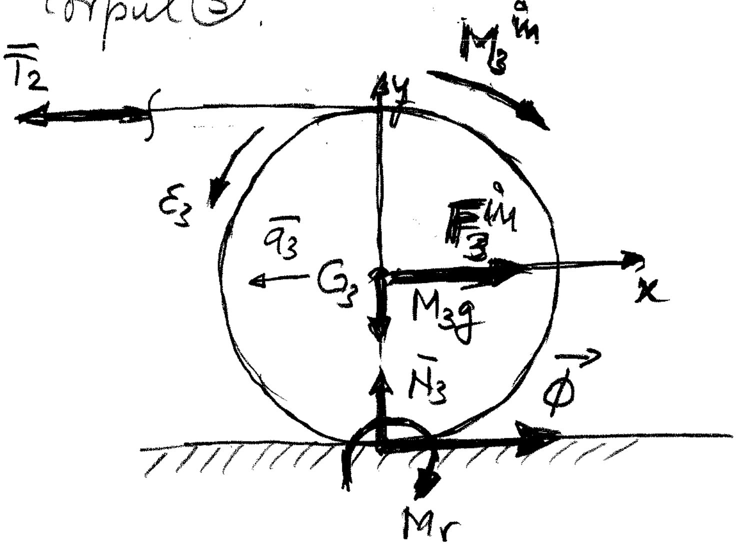
Deoarece centrul de masă G_2 nu se mișcă, nu există forță de inerție.

Corpul ② se rotește, așa după cum am văzut, spre stânga, sens în care va fi și accelerația unghiulară ε_2. În sens opus acesteia acționează momentul forțelor de inerție, M_2^{in}. A nu se confunda cu momentul de inerție mecanic J_2. Relația dintre ele este:

$$\overline{M}_2^{in} = -J_2\,\overline{\varepsilon}_2 .$$

<u>Observație</u> În cazul discurilor se recomandă alegerea reperului cu polul în centrul discurilor, adică în centrul de masă al acestora, ca la statică

Corpul ③.



$M_3\vec{g}$ = greutatea corpului ③

$\vec{N}_3$ = reacțiunea reazemului

$\overline{T_2}$ = tensiunea din firul dintre corpul ② și corpul ③ egală și de sens opus cu cea de la corpul ② și notată la fel.

$\overline{F_3}^{in}$ = forța de inerție care acționează în centrul de masă G_3 și se opune accelerației acestuia $\vec{a}_3$.

$$\overline{F}^{in}_3 = - M_3 \overline{a_3}$$

$\overline{M}^{in}_3$ = momentul forțelor de inerție care acționează asupra corpului ③ care se opune accelerației unghiulare $\vec{\varepsilon}_3$

$$\overline{M}^{in}_3 = - J_3 \vec{\varepsilon}_3$$

Fiind vorba de un disc de masă M_3 și rază R_3, momentul de inerție mecanic în raport cu o axă perpendiculară pe planul discului în centrul de masă este:

$$J_3 = \frac{M_3 R_3^2}{2}.$$

$\vec{\phi}$ = forța de frecare care are o valoare necunoscută deoarece nu se produce alunecarea și $|\vec{\phi}| \le \mu |\vec{N}_3|$

$\vec{M}_r$ = momentul de frecare de rostogolire $|\vec{M}_r| = s|\vec{N}_3|$. El se opune rostogolirii.

δ este coeficientul de frecare de rostogolire [m].

Ecuatiile scalare de echilibru dinamic ale lui d'Alembert sunt:

Pentru corpul ①

$Ox: M_1 g \sin\alpha - T_1 - F_{f1} - F_1^{in} = 0$

$Oy: N_1 - M_1 g \cos\alpha = 0$

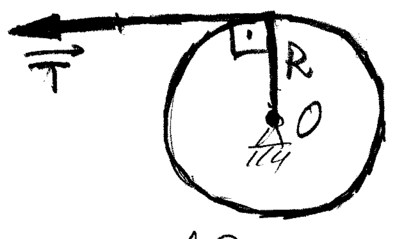
Pentru corpul ②

$Ox: T_1 \cos\alpha - H_2 - T_2 = 0$

$Oy: -T_1 \sin\alpha - M_2 g + V_2 = 0$

$M_{G_2}: T_1 \cdot R_2 - T_2 r_2 - M_2^{in} = 0$

Observatie: Firele au directia tangentei la disc. Tangenta este perpendiculară pe raza discului din punctul de tangență. Rezultă că bratul tensiunii din fir este tocmai raza discului.



Pentru corpul ③

$Ox: -T_2 + \phi + F_3^{in} = 0$

$Oy: N_3 - M_3 g = 0$

$M_{G_3}: T_2 R_3 + \phi R_3 - M_3^{in} - M_r = 0$

Sistemul de ecuatii scalare se rescrie inlocuindu-se fortele si momentele de inertie cu expresiile lor. Deoarece când s-au scris ecuațiile s-a ținut cont de semnul minus din formule (forțele de inerție au fost desenate în sens opus accelerației centrelor de masă iar momentele de inerție au fost desenate în sens opus accelerațiilor unghiulare), acum forțele și momentele de inerție se înlocuiesc cu expresiile lor fără a mai ține cont de semnul minus din formule.

① $M_1 g \sin\alpha - T_1 - \mu N_1 - M_1 a_1 = 0$

② $N_1 - M_1 g \cos\alpha = 0$

③ $T_1 \cos\alpha - H_2 - T_2 = 0$

④ $-T_1 \sin\alpha - M_2 g + V_2 = 0$

⑤ $T_1 R_2 - T_2 r_2 - J_2 \varepsilon_2 = 0$

⑥ $-T_2 + \phi + M_3 a_3 = 0$

⑦ $N_3 - M_3 g = 0$

⑧ $T_2 R_3 + \phi R_3 - J_3 \varepsilon_3 - s N_3 = 0$

Sunt 8 ecuații și 11 necunoscute:

$T_1, a_1, N_1, H_2, V_2, T_2, \varepsilon_2, \Phi, a_3, N_3$ și ε_3.

Pentru a putea fi rezolvat, ne mai trebuie trei ecuații în plus față de cele opt.

Întotdeauna numărul de ecuații scalare de echilibru va fi mai mare decât numărul de necunoscute, deoarece nu s-a ținut cont de ecuațiile de legătură. Avem astfel patru accelerații a_1, ε_2, a_3, ε_2 între care se pot stabili trei ecuații de legătură întrucât sistemul, având un singur grad de libertate, numai o accelerație este independentă, celelalte se pot calcula în funcție de ea folosind cele trei ecuații de legătură care completează sistemul inițial de 8 ecuații.

Prima ecuație de legătură se bazează pe faptul că

$$v_A = v_B$$

Dar $v_A = v_1$ iar $v_B = \omega_2 R_2$, deci rezultă

$$v_1 = \omega_2 R_2$$

care, prin derivare, conduce la prima ecuație de legătură

$$\boxed{a_1 = \varepsilon_2 R_2}$$

Cea de a doua ecuație de legătură este între vitezele v_E și v_D:

$$v_E = v_D.$$

Pe de altă parte,

$$v_E = \omega_2 r_2$$

iar

$$v_E = \omega_3 \cdot I_3 E = \omega_3 \, 2R_3 .$$

Rezultă următoarea relație între viteze:

$$\omega_2 r_2 = \omega_3 \cdot 2R_3 ,$$

care, prin derivare, conduce la forma finală a celei de a doua ecuații de legătură:

$$\boxed{\varepsilon_2 r_2 = \varepsilon_3 \, 2R_3} .$$

Cea de a treia ecuație de legătură este

$$v_3 = \omega_2 R_3$$

care, prin derivare, conduce la următoarea formă finală a celei de a treia ecuații de legătură:

$$\boxed{a_3 = \varepsilon_3 R_3} .$$

În acest moment avem 11 ecuații cu 11 necunoscute și sistemul poate fi rezolvat.

<u>Rezolvarea sistemului de ecuații scalare</u>

Dacă ne interesează accelerația corpului 1 pe planul înclinat, atunci vom exprima celelalte trei accelerații în funcție de a_1:

$$\varepsilon_2 = \frac{a_1}{R_2}$$

$$\varepsilon_3 = \frac{\varepsilon_2 r_2}{2R_3} = \frac{r_2}{2R_2R_3}\, a_1$$

$$a_3 = \varepsilon_2 R_3 = \frac{r_2}{2R_2} a_1$$

Se elimină apoi, pe rând, necunoscutele din ecuațiile (1)÷(8) până se obține o ecuație care are ca singură necunoscută accelerația a_1.

Din ecuațiile (2) și (7) se obține:

$$N_1 = M_1 g \cos\alpha,$$

$$N_3 = M_3 g.$$

Din ecuația (1) se calculează tensiunea T_1:

$$T_1 = M_1 g \sin\alpha - \mu N_1 - M_1 a_1 = M_1 g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) - M_1 a_1$$

Din ecuația (5) se calculează tensiunea T_2:

$$T_2 = \frac{T_1 \cdot R_2}{r_2} - \frac{J_2}{r_2}\varepsilon_2 = \frac{R_2}{r_2} M_1 g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) - \frac{R_2}{r_2} M_1 a_1 - \frac{J_2}{r_2}\cdot\frac{1}{R_2} a_1$$

Din ecuația (6) se calculează forța de frecare ϕ:

$$\phi = T_2 - M_3 a_3 = T_2 - \frac{r_2}{2R_2} M_3 a_1$$

Se înlocuiesc T_2, ϕ, ε_3 și N_3 în ecuația (8) și rezultă o ecuație numai în necunoscuta a_1:

$$T_2 R_3 + \left(T_2 - \frac{r_2}{2R_3} M_3 a_1\right) R_3 - J_3 \cdot \frac{r_2}{2R_2 R_3} a_1 - s \cdot M_3 g = 0$$

$$2 T_2 R_3 - \frac{r_2 R_3}{2R_2} M_3 a_1 - J_3 \frac{r_2}{2R_2 R_3} a_1 - s M_3 g = 0$$

$$\frac{2R_2R_3}{r_2}M_1 g(\sin\alpha-\mu\cos\alpha)-\frac{2R_2R_3}{r_2}M_1 a_1-\frac{2R_3}{r_2R_2}J_2 a_1- M_3\frac{r_2R_3}{2R_2}a_1-$$

$$-J_3\frac{r_2}{2R_2R_3}a_1-sM_3g=0$$

$$a_1\left[\frac{2R_2R_3}{r_2}M_1+\frac{2R_3}{r_2R_2}J_2+\frac{r_2R_3}{2R_2}M_3+\frac{r_2}{2R_2R_3}J_3\right]=$$

$$J_3=\frac{M_3R_3^2}{2}$$

$$=\frac{2R_2R_3}{r_2}M_1g(\sin\alpha-\mu\cos\alpha)-sM_3g$$

$$a_1=\frac{\frac{2R_2R_3}{r_2}M_1(\sin\alpha+\mu\cos\alpha)+sM_3}{\frac{2R_2R_3}{r_2}M_1+\frac{2R_3}{r_2R_2}J_2+\frac{3}{4}\frac{r_2R_3}{R_2}M_3}g$$

Deoarece accelerația a_1 este constantă, mișcarea punctului material pe planul înclinat va fi uniform accelerată. Dacă condițiile inițiale sunt $s(0)=0$ și $v(0)=0$, legea mișcării punctului este

$$s(t)=\frac{1}{2}a_1t^2,$$ unde t este timpul.

Întrucât T_1, T_2 și ϕ sunt exprimate în funcție de a_1, mai rămâne să calculăm forțele din articulație:

$$H_2=T_1\cos\alpha-T_2$$

$$V_2=T_1\sin\alpha+M_2g$$

observație: Dacă $a_1 = 0$ atunci, cu o viteză inițială diferită de zero, corpul de pe plan va coborî cu o viteză constantă egală cu viteza inițială.

$$a_1 = 0 \Rightarrow \dot{v}_1 = 0 \Rightarrow v_1 = v_0 = \text{constant}$$

Acest mod de mișcare are loc dacă

$$\frac{2R_2R_3}{r_2} M_1(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) - sM_3 = 0$$ cu condiția $\sin\alpha - \mu\cos\alpha > 0$

Dacă se cunosc toate celelalte date în afară de masa M_1, atunci se poate calcula mărimea ei pentru o mișcare rectilinie și uniformă a corpului (1)

$$M_1 = \frac{sM_3}{\frac{2R_2R_3}{r_2}(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)}$$ cu condiția ca $\sin\alpha - \mu\cos\alpha > 0$