Seminarul 3

Se consideră sistemul de vectori alunecători din desen. Se cunosc:

$|\bar{F}_1| = 4N$ $\quad OA = 4m$

$|\bar{F}_2| = 6N$ $\quad OB = 10m$

$|\bar{F}_3| = 4N$ $\quad OC = 4\sqrt{3}m$

$|\bar{F}_4| = 10N$ $\quad CD = 4m$

$|\bar{F}_5| = 8N$ $\quad OE = 3m$

$EH = 3\sqrt{3}m$

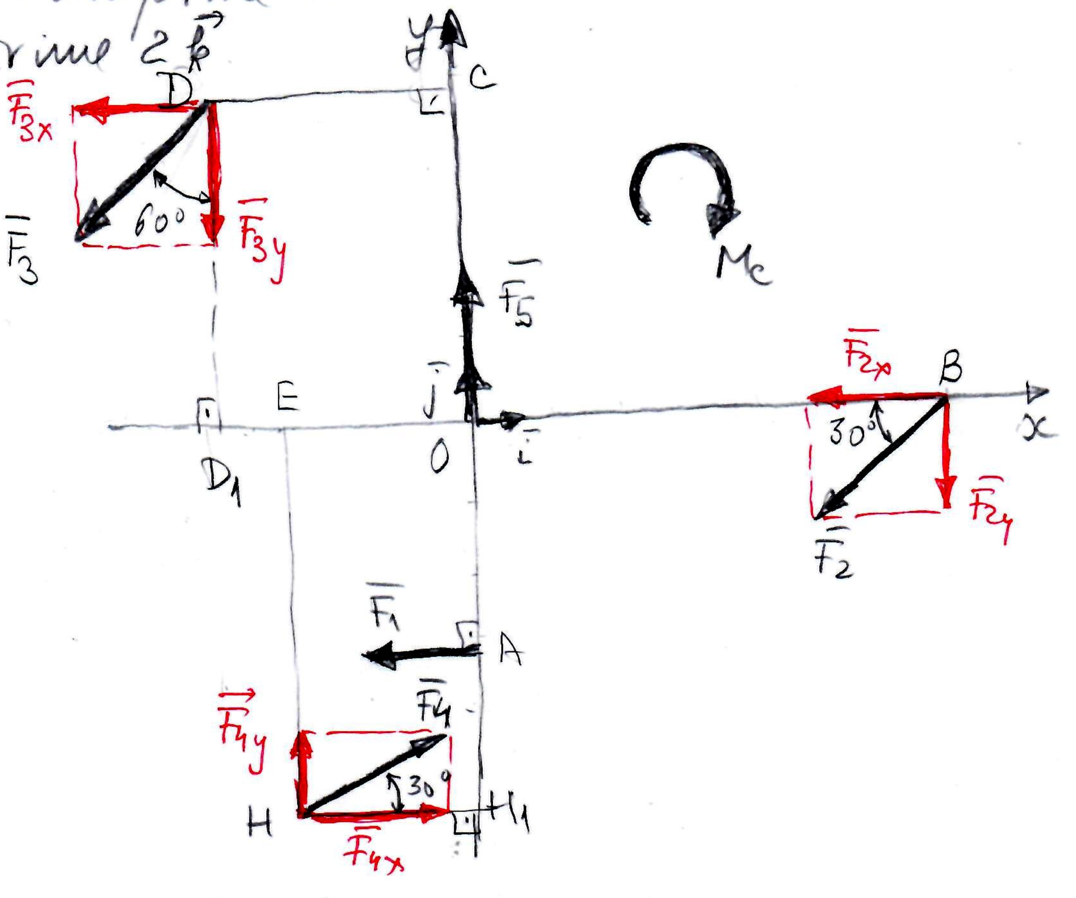
$|M_c| = 8 N\cdot m$

să se determine:

1) Torsorul în polul O, sistemul simplu echivalent și axa centrală a sistemului

2) să se determine o forță $\bar{F}$, care, adăugată sistemului, să-l transforme într-un sistem echivalent cu zero.

3) să se determine o forță $\vec{V}$ care, adăugată sistemului, să-l transforme într-un sistem echivalent cu un cuplu de mărime $2\vec{k}$



se descompun vectorii $\bar{F}_2$, $\bar{F}_3$ și $\bar{F}_4$ și rezultă următoarele expresii analitice:

$$\bar{F}_1 = -F_{1x}\bar{i} = -4\bar{i}$$

$$\bar{F}_2 = \vec{F}_{2x} + \bar{F}_{2y} = -|\bar{F}_2|\cdot\cos 30°\,\bar{i} - |\bar{F}_2|\sin 30°\,\bar{j} =$$
$$= -6\frac{\sqrt{3}}{2}\bar{i} - 6\frac{1}{2}\bar{j} = -3\sqrt{3}\,\bar{i} - 3\bar{j}$$

$$\bar{F}_3 = \bar{F}_{3x} + \bar{F}_{3y} = -|F_3|\sin 60\,\bar{i} - |F_3|\cos 60°\,\bar{j} =$$
$$= -4\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\bar{i} - 4\cdot\frac{1}{2}\bar{j} = -2\sqrt{3}\,\bar{i} - 2\bar{j}$$

$$\bar{F}_4 = \vec{F}_{4x} + \vec{F}_{4y} = +|\bar{F}_4|\cos 30°\,\bar{i} + |\bar{F}_4|\sin 30°\,\bar{j} =$$
$$= 10\frac{\sqrt{3}}{2}\bar{i} + 10\cdot\frac{1}{2}\bar{j} = 5\sqrt{3}\,\bar{i} + 5\bar{j}$$

$$\bar{F}_5 = F_{5y}\bar{j} = 8\bar{j}$$

Vectorul rezultant $\vec{R}$ se calculează cu ajutorul tabelului următor.

	$\vec{i}$	$\vec{j}$
$\vec{F}_1$	-4	0
$\vec{F}_2$	$-3\sqrt{3}$	-3
$\vec{F}_3$	$-2\sqrt{3}$	-2
$\vec{F}_4$	$5\sqrt{3}$	5
$\vec{F}_5$	0	8
$\vec{R}$	-4	8

$$\Rightarrow \bar{R} = -4\vec{i} + 8\vec{j}$$
$$|\bar{R}| = \sqrt{(-4)^2 + 8^2} = \sqrt{80} \simeq 8{,}94\,N$$

Se calculează momentele celor cinci vectori.

$$\bar{M}_0(\bar{F}_1) = -|OA| \cdot |\bar{F}_1|\, \bar{k} = -4 \cdot 4\, \bar{k} = -16\, \bar{k}$$

$$\bar{M}_0(\bar{F}_2) = \bar{M}_0(\bar{F}_{2x}) + \bar{M}_0(\bar{F}_{2y}) = 0 - |OB| \cdot |\bar{F}_{2y}|\, \bar{k} =$$

$$= -10 \cdot 3\, \bar{k} = -30\, \bar{k}$$

$$\bar{M}_0(\bar{F}_3) = \bar{M}_0(\bar{F}_{3x}) + \bar{M}_0(\bar{F}_{3y}) = |OC| \cdot |\bar{F}_{3x}|\, \bar{k} + \underset{|DC|}{\underset{\shortparallel}{|OD_1|}}\, |\bar{F}_{3y}|\, \bar{k} =$$

$$= 4\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3}\, \vec{k} + 4 \cdot 2\, \vec{k} = 32\, \bar{k}$$

$$\bar{M}_0(\bar{F}_4) = \bar{M}_0(\bar{F}_{4x}) + \bar{M}_0(\bar{F}_{4y}) = \underset{|EH|}{\underset{\shortparallel}{|OH_1|}}\, |\bar{F}_{4x}|\, \bar{k} - |OE|\, |\bar{F}_{4y}|\, \bar{k} =$$

$$= 3\sqrt{3} \cdot 5\sqrt{3}\, \bar{k} - 3 \cdot 5\, \bar{k} = 30\, \bar{k}$$

$$\bar{M}_0(\bar{F}_5) = 0$$

Cuplul $\vec{M}_c$ este situat în planul xOy deci vectorul moment al cuplului este perpendicular pe acest plan. Sensul cuplului M_c este negativ.

Prin urmare

$$\vec{M}_c = -8\, \vec{k}$$

Vectorul moment rezultant $\vec{M}_0$ este:

$$\vec{M}_0 = \vec{M}_0(\vec{F}_1) + \vec{M}_0(\vec{F}_2) + \vec{M}_0(\vec{F}_3) + \vec{M}_0(\vec{F}_4) + \vec{M}_0(\vec{F}_5) =$$

$$= (-16 - 30 + 32 + 30 + 0 - 8)\, \bar{k} = 8\, \vec{k} \qquad |\bar{M}_0| = 8 \text{ N·m}.$$

Torsorul în polul O al sistemului este

$$T_0(S) = \begin{cases} \bar{R} = -4\bar{i} + 8\bar{j} \neq 0 \\ \vec{M}_0 = 8\bar{k} \neq 0 \end{cases}$$

Pentru a determina sistemul simplu echivalent se calculează și scalarul torsorului sau trinomul invariant $\bar{R}\cdot\bar{M}_0$.

$$\bar{R}\cdot\bar{M}_0 = (-4\bar{i}+8\bar{j})\cdot 8\bar{k} = 0$$

Prin urmare avem următoarele caracteristici ale torsorului

$$\bar{R} \neq 0$$
$$\bar{M}_0 \neq 0$$
$$\bar{R}\cdot\bar{M}_0 = 0$$

Rezultă că sistemul este echivalent cu un vector unic egal cu vectorul rezultant $\vec{R}$ și situat pe axa centrală a sistemului.

Axa centrală are, în cazul plan, ecuația:

$$x R_y - y R_x = M_0$$

adică

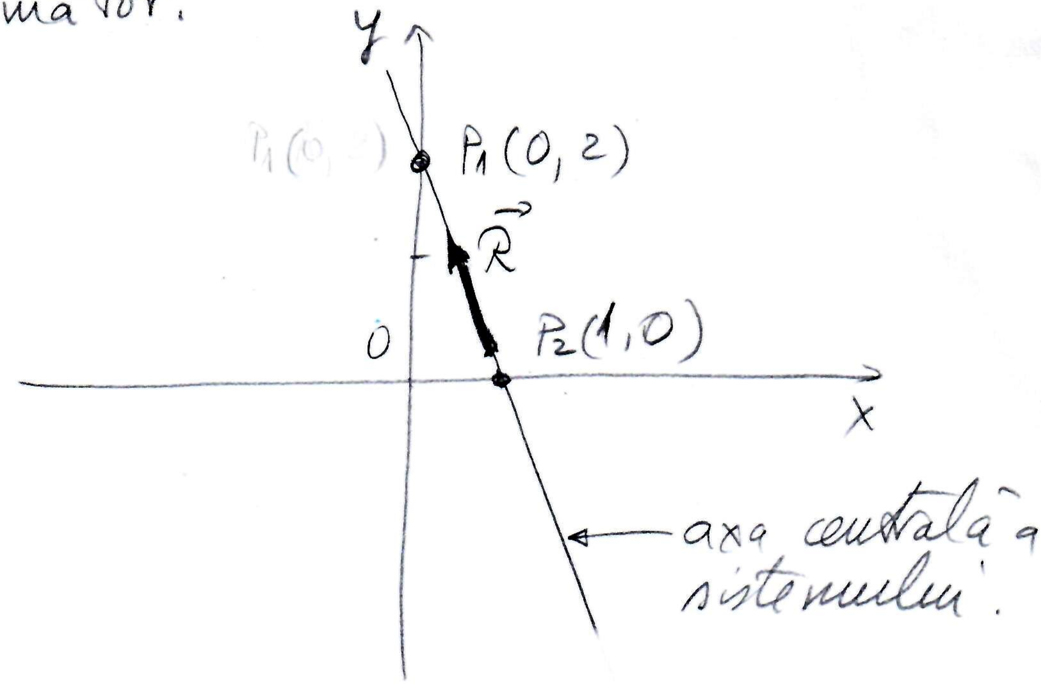
$$x\,8 - y(-4) = 8.$$

După simplificare, se obține ecuația:

$$2x + y = 2.$$

Intersecția axei centrale cu axele de coordonate este $\begin{cases} x=0 \\ y=2 \end{cases}$ și $\begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases}$.

Axa centrală este reprezentată în desenul următor.



Intregul sistem de solicitări poate fi înlocuit cu o singură forță egală cu $\vec{R}$ și situată pe axa centrală a sistemului, efectul mecanic fiind același.

2. Prin adăugarea vectorului $\bar{F}$ se cere ca noul sistem obținut să fie echivalent cu zero. Notăm cu $\bar{R}^{(1)}$ și $M_0^{(1)}$ torsorul noului sistem (S_1) și avem

$$T_0(S_1) = \begin{cases} \vec{R}^{(1)} = \vec{R} + \vec{F} = 0 \\ \vec{M}_0^{(1)} = \vec{M}_0 + \vec{M}_0(\vec{F}) = 0 \end{cases}$$

Rezultă

$$\vec{F} = -\bar{R} = 4\bar{i} - 8\bar{j}$$
$$\bar{M}_0(F) = -\vec{M}_0 = -8\bar{k}$$

Ecuația dreptei suport a forței $\vec{F}$ este

$$x F_y - y F_x = M_0(F)$$

adică

$$x \cdot (-8) - y(4) = -8$$

care revine la

$$2x + y = 2$$

adică exact ecuația axei centrale.

<u>Observație</u> Faptul că sistemul este echivalent cu un vector unic egal cu $\bar{R}$ și situat pe axa centrală a sistemului, ne poate da răspunsul la întrebare în mod direct. Pentru ca sistemul să fie echivalent cu ~~zero~~, trebuie anihilat efectul forței $\bar{R}$ situată pe axa centrală prin adăugarea unei forțe F egală și de sens contrar cu $\vec{R}$ și așezată tot pe axa centrală.

3. Pentru ca sistemul nou format prin adăugarea unui vector $\vec{V}$ să fie echivalent cu un cuplu, trebuie să fie îndeplinite condițiile

$$R^{(2)} = \vec{R} + \vec{V} = 0$$

$$M_0^{(2)} = \vec{M}_0 + \vec{M}_0(\vec{V}) = 24\bar{k}$$

$$\bar{R}^{(2)} M_0^{(2)} = 0$$

unde cu indicele 2 s-au notat componentele torsorului sistemului obținut prin adăugarea vectorului V. Rezultă că:

$$\vec{V} = -\vec{R} = 4\bar{i} - 8\vec{j}$$

$$\vec{M}_0(\vec{V}) = 24\bar{k} - M_0 = 24\bar{k} - 8\bar{k} = 16\bar{k}$$

Trebuie determinat suportul vectorului $\vec{V}$ pentru a ști unde să-l așezăm. Ecuația suportului este

$$x V_y - y V_x = M_0(\bar{V})$$

adică

$$x(-8) - y4 = 16$$

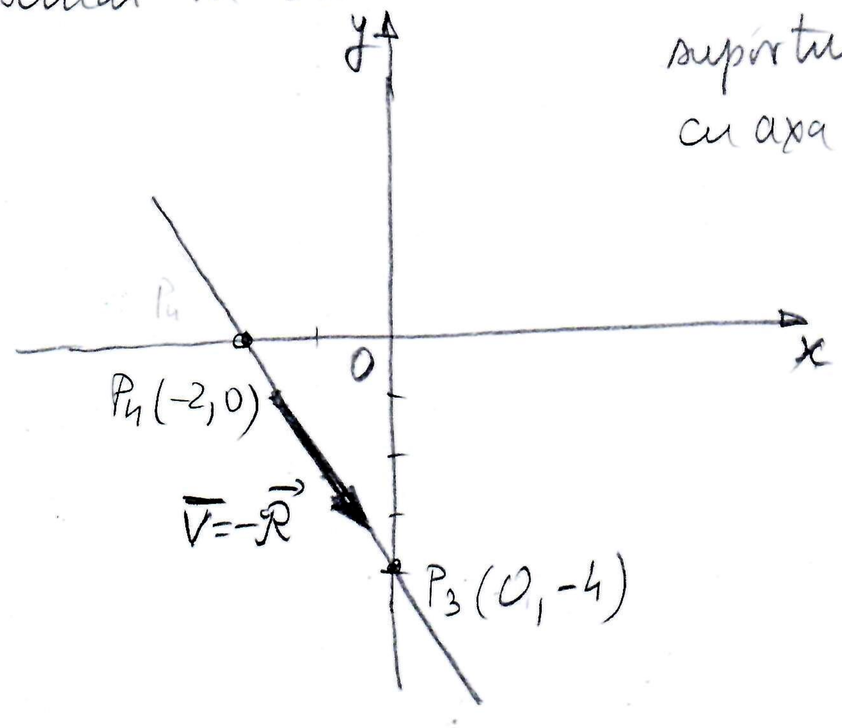
sau încă

$$2x + y = -4$$

Pentru a desena suportul lui $\vec{V}$, determinăm intersecțiile cu axele ale dreptei suport.

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = -4 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -2 \\ y = 0 \end{cases}$$

Vectorul $\bar{V}$ așezat pe suportul său este reprezentat în desenul următor. Deoarece $\bar{V} = -\bar{R}$ suportul său este paralel cu axa centrală.

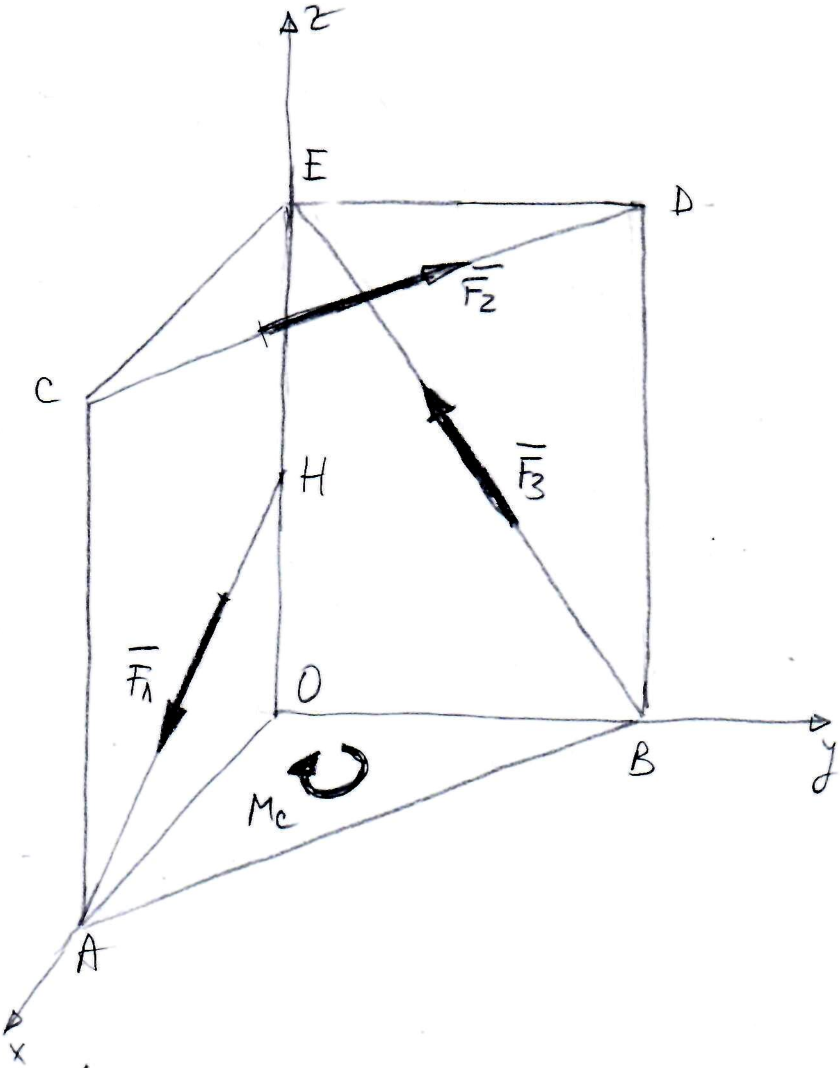


2. Se consideră sistemul de vectori alunecători din desen care acționează asupra unei prisme triunghiulare drepte. Se cunosc:

$|\bar{F}_1| = |\bar{F}_2| = f\sqrt{2}\,[N]$ $\quad OA = OB = l\,[m]$ unde f și l sunt parametri

$|\bar{F}_3| = f\sqrt{5}\,[N]$ $\quad OE = 2l\,[m]$ exprimați în Newtoni

$|M_c| = 2fl\,[N\cdot m]$ $\quad OH = l\,[m]$ și respectiv metri.



să se determine

1. Torsorul în polul O, sistemul simplu echivalent, axa centrală și torsorul minim care se vor figura pe desen.
2. Torsorul în polul D.
3. Trinomul invariant în polul D.

4. Unghiul dintre componentele torsorului în polul O.
5. Momentul axial al lui $\bar{F}_3$ față de $\bar{AD}$.

Torsorul în polul O este format din vectorul rezultant și vectorul moment rezultant în polul O.

$$T_0 = \begin{cases} \bar{R} = R_x\bar{i} + R_y\bar{j} + R_z\bar{k} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 \\ \bar{M}_0 = M_{0x}\bar{i} + M_{0y}\bar{j} + M_{0z}\bar{k} = \vec{M}_0(\vec{F}_1) + \vec{M}_0(\vec{F}_2) + \vec{M}_0(\vec{F}_3) + \vec{M}_c \end{cases}$$

Pentru calculul acestor vectori trebuie determinată expresia analitică a fiecăruia.

Forța $\bar{F}_1$ este dirijată de la H la A. Coordonatele acestor puncte sunt

$$H(0,0,\ell), \quad A(\ell,0,0)$$

Expresia analitică a forței $\bar{F}_1$ este:

$$\bar{F}_1 = |\bar{F}_2| \cdot \frac{(x_A - x_H)\bar{i} + (y_A - y_H)\bar{j} + (z_A - z_H)\bar{k}}{\sqrt{(x_A - x_H)^2 + (y_A - y_H)^2 + (z_A - z_H)^2}} =$$

$$= f\sqrt{2}\,\frac{(\ell-0)\bar{i} + (0-0)\bar{j} + (0-\ell)\bar{k}}{\sqrt{(\ell-0)^2 + (0-0)^2 + (0-\ell)^2}} = f\sqrt{2}\,\frac{\ell\bar{i} - \ell\bar{k}}{\sqrt{\ell^2 + \ell^2}} =$$

$$= f\cancel{\sqrt{2}}\,\frac{\cancel{\ell}\bar{i} - \cancel{\ell}\bar{k}}{\cancel{\ell}\cancel{\sqrt{2}}} = f\bar{i} - f\bar{k}$$

Forța $\bar{F}_2$ este dirijată de la C la D. Coordonatele acestor puncte sunt

$$C(\ell, 0, 2\ell) \quad D(0, \ell, 2\ell).$$

Expresia analitică a forței $\bar{F}_2$ este:

$$\bar{F}_2 = f\sqrt{2}\,\frac{-l\bar{i}+l\bar{j}}{\sqrt{l^2+l^2}} = f\cancel{\sqrt{2}}\,\frac{-\cancel{l}\bar{i}+\cancel{l}\bar{j}}{\cancel{l\sqrt{2}}} = -f\bar{i}+f\bar{j}.$$

Forța $\bar{F}_3$ este dirijată de la B la E. Coordonatele acestor puncte sunt

$B(0, l, 0)$, $E(0, 0, 2l)$.

Expresia analitică a forței $\bar{F}_3$ este

$$\bar{F}_3 = f\sqrt{5}\,\frac{-l\bar{j}+2l\bar{k}}{\sqrt{l^2+4l^2}} = f\cancel{\sqrt{5}}\,\frac{-\cancel{l}\bar{j}+2\cancel{l}\bar{k}}{\cancel{l\sqrt{5}}} = -f\vec{j}+2f\vec{k}.$$

Vectorul rezultant $\vec{R}$ se calculează cu ajutorul tabelului următor.

	$\bar{i}$	$\bar{j}$	$\bar{k}$
$\bar{F}_1$	f	0	$-f$
$\bar{F}_2$	$-f$	f	0
$\bar{F}_3$	0	$-f$	$2f$
$\vec{R}$	0	0	f

$\Rightarrow \vec{R} = f\vec{k}$ $|\vec{R}| = f\,[N]$

Momentul vectorului $\bar{F}_1$ în raport cu polul O este

$$\bar{M}_O(\bar{F}_1) = \bar{r}_A \times \bar{F}_1 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ l & 0 & 0 \\ f & 0 & -f \end{vmatrix} = fl\bar{j}$$

Momentul vectorului $\bar{F}_2$ în raport cu polul O este

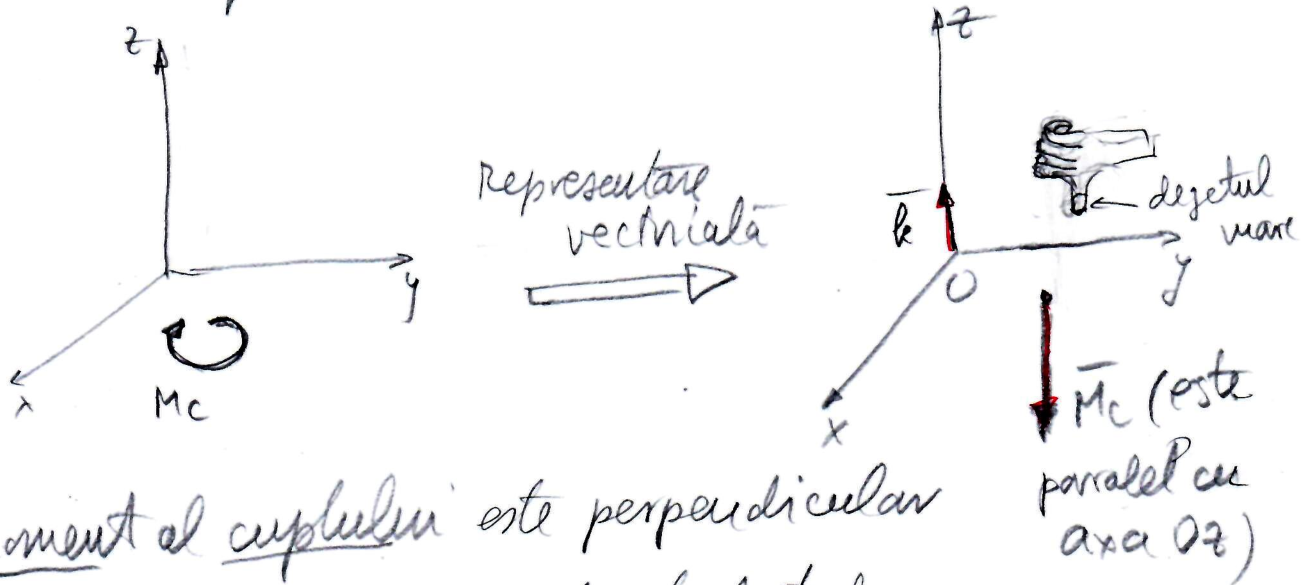
$$\bar{M}_O(\bar{F}_2) = \bar{r}_C \times \bar{F}_2 = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ l & 0 & 2l \\ -f & f & 0 \end{vmatrix} = -2fl\bar{i} - 2fl\bar{j} + fl\bar{k}$$

Momentul vectorului $\bar{F}_3$ în raport cu polul O este

$$\bar{M}_O(\bar{F}_3) = \bar{r}_E \times \bar{F}_3 = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 0 & 2l \\ 0 & -f & 2f \end{vmatrix} = 2fl\bar{i}$$

Observație Deoarece suportul vectorului $\bar{F}_3$ intersectează axele Oy și Oz, momentul său polar nu va avea componente după aceste direcții.

Corpul mai este acționat de un cuplu $\bar{M}_C$ denumit și moment concentrat. Acesta este situat în planul xOy. Prin urmare, vectorul



moment al cuplului este perpendicular pe planul xOy. Sensul este dat de regula mâinii drepte. Sensul vectorului este dat de degetul mare al mâinii drepte atunci când celelalte patru degete sunt orientate în sensul de rotație al săgeții rotunde ce simbolizează cuplul, așa cum se arată în desen.

În cazul nostru

$$\vec{M_c} = -|M_c|\bar{k} = -2fl\bar{k}$$

Observație. Vectorul cuplu este un vector liber și poate fi translat oriunde în spațiu, adică nu are un punct de aplicație bine precizat.

Vectorul moment rezultant în polul O, $\vec{M_0}$ se calculează cu ajutorul următorului tabel.

	$\bar{i}$	$\bar{j}$	$\bar{k}$
$\bar{M}_0(\bar{F}_1)$	0	fl	0
$\vec{M}_0(\bar{F}_2)$	$-2fl$	$-2fl$	fl
$\bar{M}_0(\bar{F}_3)$	$2fl$	0	0
$\vec{M}_c$	0	0	$-2fl$
$\vec{M}_0$	0	$-fl$	$-fl$

$\Rightarrow \vec{M}_0 = -fl\bar{j} - fl\bar{k}$ $\quad |\vec{M}_0| = fl\sqrt{2}$ [Nm]

Torsorul în polul O este deci:

$$T_0 = \begin{cases} \vec{R} = f\vec{k} \\ \vec{M}_0 = -fl\vec{j} - fl\vec{k} \end{cases}$$

Pentru a determina sistemul simplu echivalent, trebuie calculat scalarul torsorului sau trinomul invariant.

$$\vec{R}\cdot\vec{M}_0 = -f^2 l$$

Deoarece $\begin{cases} \bar{R} \neq 0 \\ M_0 \neq 0 \\ \bar{R}\cdot\vec{M}_0 \neq 0 \end{cases}$ sistemul este echivalent cu un torsor propriu-zis sau cu un vector și un cuplu.

Axa centrală este locul geometric al punctelor din spațiu în care, dacă sunt luate ca pol, vectorul moment resultant are valoarea minimă

$\bar{M}_{min} = \dfrac{\vec{R}\cdot\vec{M}_0}{\vec{R}^2}\vec{R}$ și este coliniar cu vectorul resultant.

Ecuația axei centrale este

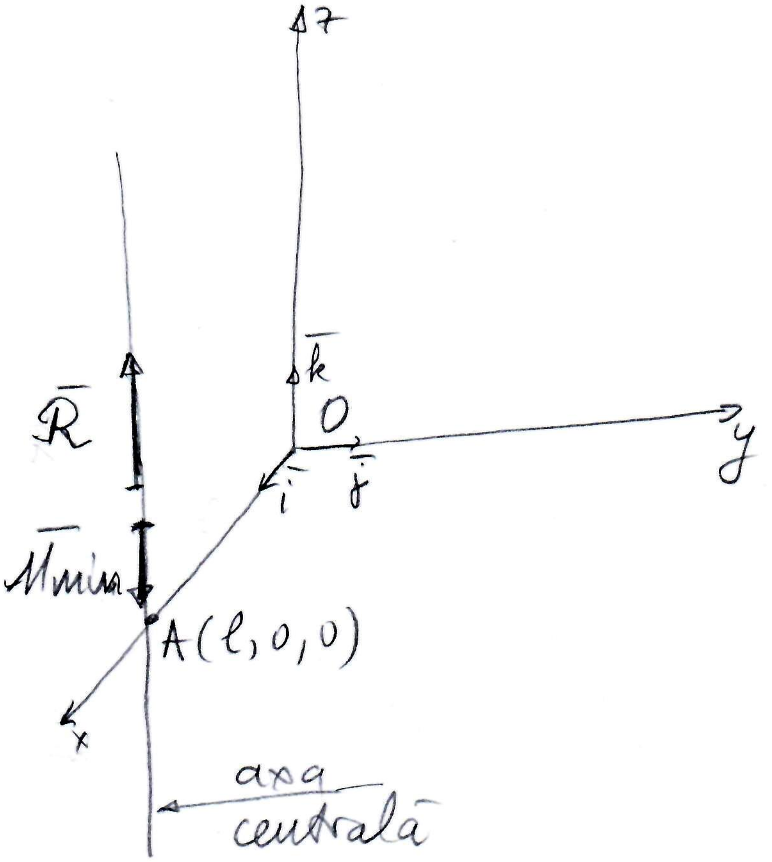
$\bar{r} = \vec{r}_0 + \lambda\vec{R}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, unde $\bar{r}_0$ este vectorul de poziție al unui punct de pe axa centrală și anume el este piciorul perpendicularei construită din O pe axa centrală, cu

$$\bar{r}_0 = \frac{\bar{R}\times\bar{M}_0}{R^2}.$$

$$\vec{R}\times\vec{M}_0 = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 0 & f \\ 0 & -fl & -fl \end{vmatrix} = f^2 l\bar{i}, \quad R^2 = f^2$$

$$\vec{r}_0 = \frac{f^2 l\bar{i}}{f^2} = l\bar{i}$$

Axa centrală este o dreaptă paralelă cu axa Oz deorece este paralelă cu $\bar{R} = f\bar{k}$ și trece prin punctul care are vectorul de poziție $\bar{r}_0 = l\bar{i}$, adică are coordonatele $(l, 0, 0)$. Din desen rezultă că axa centrală coincide cu latura AC a prismei.



În punctele axei centrale torsorul este minim, adică vectorul moment rezultant are cea mai mică valoare posibilă egală cu

$$\vec{M}_{min} = \frac{\vec{R}\cdot\vec{M}_0}{R^2}\vec{R} = \frac{-f^2 l}{f^2} f\vec{k} = -fl\bar{k}$$

Practic corpul va avea aceeași mișcare fie că acționează asupra sa sistemul inițial sau numai $\bar{R}$ și $\vec{M}_{min}$ așa cum sunt figurate în desen.

Torsorul în polul D este format din același vector rezultant $\bar{R}$ care este invariant la schimbarea polului iar vectorul moment rezultant în polul D se calculează cu formula

$$\vec{M}_D = \vec{M}_O - \vec{OD} \times \vec{R} \quad \text{unde} \quad \overline{OD} = l\bar{j} + 2l\bar{k}$$

Prin urmare

$$\vec{M}_D = -fl\bar{j} - fl\bar{k} - \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & l & 2l \\ 0 & 0 & f \end{vmatrix} =$$

$$= -fl\bar{j} - fl\bar{k} - fl\bar{i} = -fl\bar{i} - fl\bar{j} - fl\bar{k}$$

$$T_D = \begin{cases} \bar{R} = f\bar{k} \\ \bar{M}_D = -fl\bar{i} - fl\bar{j} - fl\bar{k} \end{cases}$$

<u>Observație</u> Vectorul moment rezultant în punctele axei centrale este $\vec{M}_{min} = -fl\bar{k}$ cu $|\vec{M}_{min}| = fl$ N·m

În polul O, $\bar{M}_O = -fl\bar{j} - fl\bar{k}$ cu $|\vec{M}_O| = fl\sqrt{2}$ N·m

În polul D, $\bar{M}_D = -fl\bar{i} - fl\bar{j} - fl\bar{k}$ cu $|\vec{M}_D| = fl\sqrt{3}$ N·m

Se observă cum vectorul moment rezultant are modulul crescător cu cât ne depărtăm de axa centrală.

3. Trinomul invariant calculat pentru polul D este

$$\vec{R}\cdot\bar{M}_D = (f\bar{k})(-fl\bar{i} - fl\bar{j} - fl\bar{k}) = -f^2 l \bar{k}$$

deci egal cu cel calculat pentru torsorul în polul O, așa cum era de așteptat.

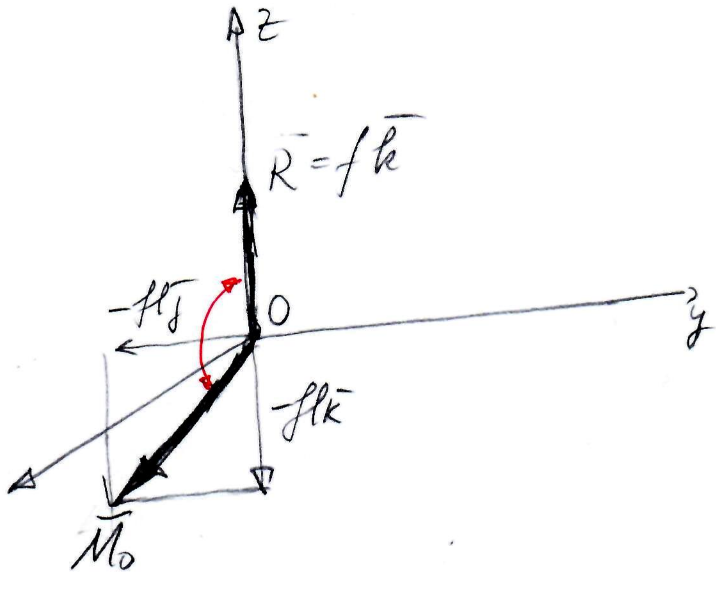
4. Unghiul dintre doi vectori $\bar{a}$ și $\bar{b}$ se calculează cu o formulă ce rezultă din produsul scalar

$$\cos(\widehat{\bar{a},\bar{b}}) = \frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{a}||\bar{b}|}$$

Unghiul dintre componentele torsorului este

$$\cos(\bar{R},\bar{M}_O) = \frac{\bar{R}\cdot\bar{M}_O}{|\bar{R}||\bar{M}_O|} = \frac{-f^2 l}{f\cdot fl\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Rezultă că unghiul dintre componentele torsorului în polul O este de 135°.



5 Momentul axial în raport cu o axă este proiecția vectorului moment calculat într-un punct al axei, pe direcția acesteia.

Axa pe direcția $\overline{AD}$ are versorul $\bar{u} = \frac{\overline{AD}}{|\overline{AD}|}$

$A(\ell, 0, 0)$ $D(0, \ell, 2\ell)$

$\overrightarrow{AD} = -\ell\bar{i} + \ell\bar{j} + 2\ell\bar{k}$

$$\bar{u} = \frac{-\ell\bar{i} + \ell\bar{j} + 2\ell\bar{k}}{\sqrt{\ell^2+\ell^2+4\ell^2}} = \frac{-\ell\bar{i} + \ell\bar{j} + 2\ell\bar{k}}{\ell\sqrt{6}} = \frac{-\bar{i} + \bar{j} + 2\bar{k}}{\sqrt{6}}$$

Momentul vectorului $\bar{F}_3$ în raport cu punctul A care aparține axei $\overline{AD}$ este

$$\bar{M}_A(\bar{F}_3) = \bar{M}_0(\bar{F}_3) - \overline{OA} \times \bar{F}_3 = 2f\ell\bar{i} - \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \ell & 0 & 0 \\ 0 & -f & 2f \end{vmatrix} =$$

$$= 2f\ell\bar{i} + 2f\ell\bar{j} + f\ell\bar{k}$$

Proiecția unui vector pe o axă se obține înmulțind scalar vectorul cu versorul axei. Proiecția lui $\vec{M}_A(\vec{F}_3)$ pe direcția $\overline{AD}$ este

$$M_{OA}(\bar{F}_3) = \bar{M}_A(\bar{F}_3) \cdot \bar{u} = (2f\ell\bar{i} + 2f\ell\bar{j} + f\ell\bar{k}) \cdot \frac{-\bar{i} + \bar{j} + 2\bar{k}}{\sqrt{6}} =$$

$$= \frac{f\ell}{\sqrt{6}}(-\cancel{2} + \cancel{2} + 2) = \frac{2}{\sqrt{6}} f\ell$$ care reprezintă mărimea algebrică a momentului axial a lui $\bar{F}_3$ în raport cu direcția AD. Vectorul moment axial este:

$$M_{OA}(\bar{F}_3) \cdot \bar{u} = \frac{2}{\sqrt{6}} f\ell \cdot \frac{1}{\sqrt{6}}(-\bar{i} + \bar{j} + 2\bar{k}) = -\frac{1}{3} f\ell\vec{i} + \frac{1}{3} f\ell\bar{j} + \frac{2}{3} f\ell\bar{k}$$