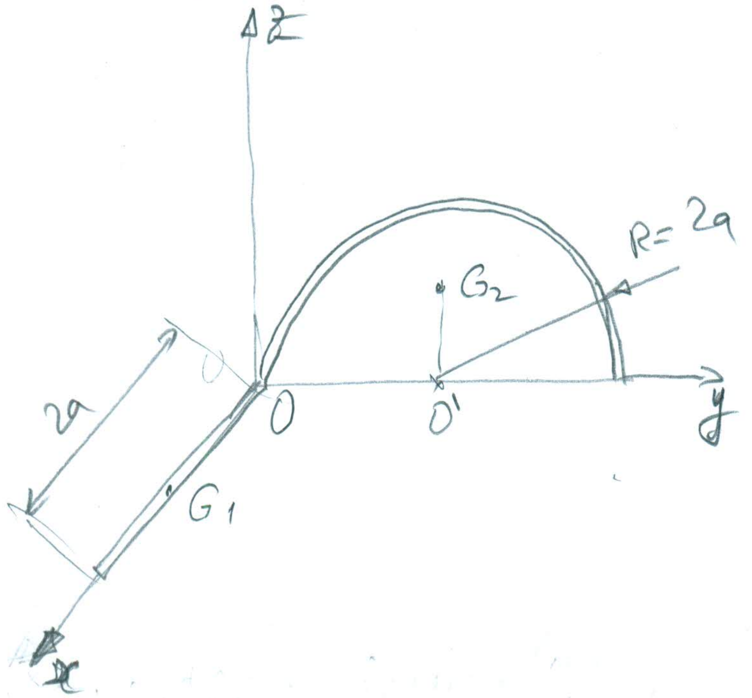
Seminarul 5

Se consideră corpul din desen format din bare omogene. Să se calculeze coordonatele centrului de masă.

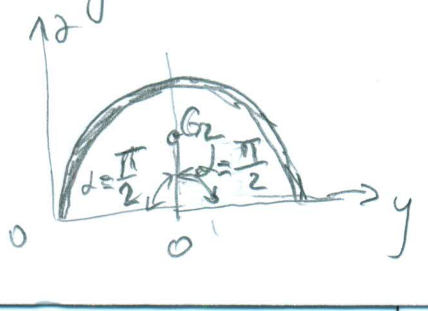


Primul pas în rezolvarea problemei constă în împărțirea corpului în zone simple al căror centru de masă se cunoaște sau este ușor de determinat. Acest corp are două zone. O primă zonă formată din bara rectilinie de lungime 2a coliniară cu axa Ox și o a doua zonă formată dintr-un arc de cerc de rază $R = 2a$. situată în planul yOz. Se figurează cu aproximație pe desen poziția celor două centre de masă notate G_1 și respectiv G_2. Se desenează apoi următorul tabel. În prima coloană se scrie numărul zonei și se face o schiță a acesteia.

Nr art.	x_{Gi}	y_{Gi}	z_{Gi}	L_i	$x_{Gi}L_i$	$y_{Gi}L_i$	$z_{Gi}L_i$
1	a	0	0	$2a$	$2a^2$	0	0
2.	0	$2a$	$\frac{4a}{\pi}$	$\pi \cdot 2a$	0	$\pi \cdot 4a^2$	$8a^2$
Σ				$2a(\pi+1)$	$2a^2$	$\pi \cdot 4a^2$	$8a^2$

Punctul G_1 are coordonatele $(a, 0, 0)$ care sunt trecute în tabel. Lungimea zonei 1 (L_1) este lungimea barei adică $2a$. Produsele dintre lungime și coordonatele centrului de masă apar în ultimile trei coloane.

Punctul G_2 se găsește în planul yOz deci coordonata după axa Ox este zero. Coordonata după axa Oy este egală cu OO' adică este raza cercului de mărime $2a$. Coordonata după axa Oz este $O'G_2$ care se calculează cu formula generală $\frac{R\sin\alpha}{\alpha}$ unde R este raza cercului iar α este jumătatea unghiului arcului, în cazul nostru jumătate din $180°$ adică $90°$. Formula se folosește __NUMAI__ cu unghiul α exprimat în radiani, deci $\alpha = \frac{\pi}{2}$ rad.



$$O'G_2 = \frac{2a\sin\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2a\cdot 1}{\frac{\pi}{2}} = \frac{4a}{\pi}$$

Se completează tabelul cu

coordonatele punctului $G_2(0, 2a, \frac{4a}{\pi})$. Lungimea cercului este $2\pi R$, deci a unui semicerc este πR. Prin urmare $L_2 = \pi \cdot 2a$. Se completează apoi ultimile trei coloane cu produsele dintre L_2 și coordonatele lui G_2.

Se completează ultima linie din tabel notată cu litera Σ (sigma) care sugerează o sumare. Primele trei coloane nu se sumează de aceea hașurăm căsuțele. Ultimile 4 coloane se sumează și rezultatele se trec în căsuțele corespunzătoare. Coordonatele centrului de masă G al corpului se calculează cu formulele:

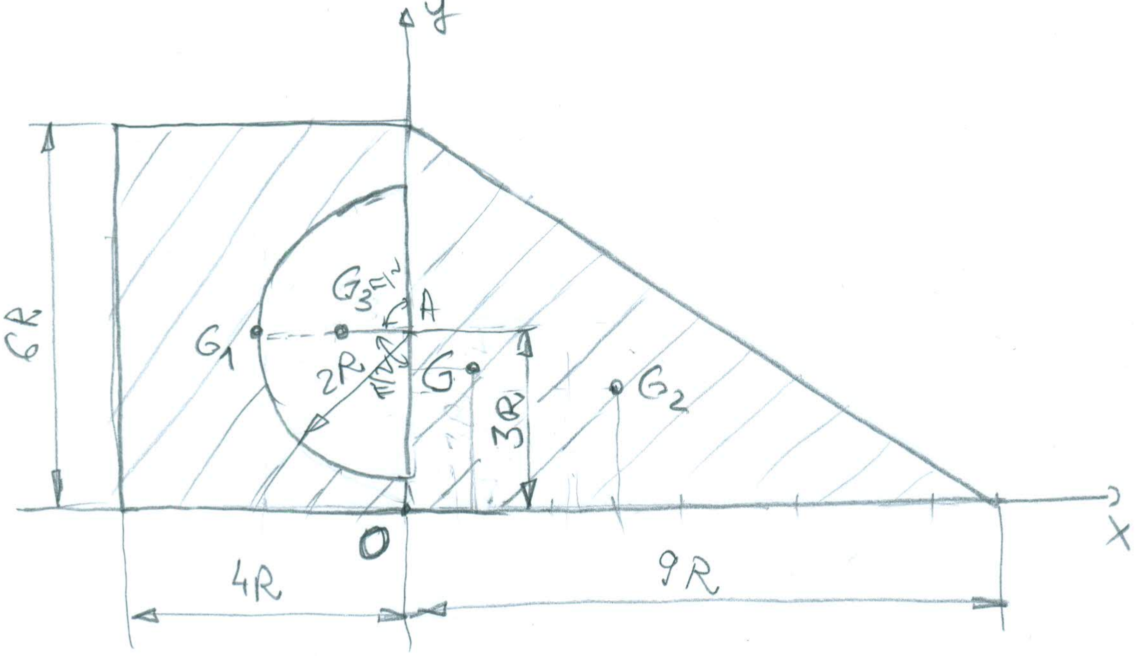
$$x_G = \frac{\sum_{i=1}^{2} x_{G_i} L_i}{\sum_{i=1}^{2} L_i} = \frac{x_{G_1}L_1 + x_{G_2}L_2}{L_1+L_2} = \frac{2a^{\cancel{2}}}{\cancel{2a}(\pi+1)} = \frac{a}{\pi+1} \approx 0{,}24a$$

$$y_G = \frac{\sum_{i=1}^{2} y_{G_i} L_i}{\sum_{i=1}^{2} L_i} = \frac{y_{G_1}L_1 + y_{G_2}L_2}{L_1+L_2} = \frac{\pi \cdot \cancel{4}^{2} a^{\cancel{2}}}{\cancel{2a}(\pi+1)} = \frac{2\pi}{\pi+1} a \approx 1{,}51a$$

$$z_G = \frac{\sum_{i=1}^{2} z_{G_i} L_i}{\sum_{i=1}^{2} L_i} = \frac{z_{G_1}L_1 + z_{G_2}L_2}{L_1+L_2} = \frac{\cancel{8}^{4} a^{\cancel{2}}}{\cancel{2a}(\pi+1)} = \frac{4}{\pi+1} a \approx 0{,}96a$$

Centrul de masă al corpului nu este neapărat un punct din corp, după cum rezultă și în acest caz.

Se consideră placa plană omogenă din desen. Să se calculeze coordonatele centrului de masă al plăcii.



Această placă se împarte în trei zone simple:

1. un dreptunghi de laturi 4R și 6R.
2. un triunghi dreptunghic având catetele 9R și 6R.
3. un semicerc de rază 2R care se scoate.

Figurăm, cu aproximație, punctele în care este centrul de masă al fiecărei zone și le notăm G_1, G_2 și G_3.

Calculăm coordonatele punctului G_1 și aria primei zone.

$$x_{G_1} = -\frac{4R}{2} = -2R \quad y_{G_1} = \frac{6R}{2} = 3R \quad A_1 = 6R\cdot 4R = 24R^2$$

(atenție la semnul minus)

Calculăm coordonatele punctului G_2 și aria celei de a doua zone

$$x_{G_2} = \frac{9R}{3} = 3R \quad y_{G_2} = \frac{6R}{3} = 2R \quad A_2 = \frac{9R\cdot \overset{3}{\cancel{6}}R}{\cancel{2}} = 27R^2$$

observatie

Centrul de masă la un triunghi se află la o treime de bază și două treimi de vârf, iar aria este produsul catetelor supra doi (baza ori înălțimea supra doi).

Calculăm coordonatele centrului de masă G_3 și aria zonei trei.

Coordonata x_{G_3} este negativă și se calculează cu formula generală $\frac{2}{3} R \frac{\sin \alpha}{\alpha}$ (α în radiani!!!) unde R este raza cercului iar α este jumătatea unghiului sectorului de cerc. În cazul nostru raza cercului este 2R iar jumătatea unghiului este $\frac{\pi}{2}$. Rezultă

$$x_{G_3} = -\frac{2}{3} \cdot \frac{2R \sin \frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}} = -\frac{2}{3} \frac{2 \cdot 2R}{\pi} = -\frac{8R}{3\pi}$$

$$y_{G_3} = 3R$$

$$A_3 = \frac{\pi \cdot (2R)^2}{2} = \frac{\pi \cdot \cancel{4}^{2} R^2}{\cancel{2}} = 2\pi R^2$$

observatie Ariile care se scot se introduc în calcule cu semnul minus.

Se construiește apoi următorul tabel

Nr. crt	x_{Gi}	y_{Gi}	A_i	$x_{Gi} A_i$	$y_{Gi} A_i$
1.	$-2R$	$3R$	$24R^2$	$-48R^3$	$72R^3$
2.	$3R$	$2R$	$27R^2$	$81R^3$	$54R^3$
3 (−)	$-\frac{8R}{3\pi}$	$3R$	$-2\pi R^2$	$+\frac{16}{3}R^3$	$-6\pi R^3$
$\sum$			$(51-2\pi)R^2$	$\left(33+\frac{16}{3}\right)R^3$	$(126-6\pi)R^3$

Observații !

1. În prima coloană ariile care se scot nu se hașurează și, eventual, spre aducere aminte, se trece un semn minus.

2. Produsul dintre coordonatele centrului de masă și ariile zonelor respectă regula semnelor. (exemplu: coordonată negativă × arie cu minus = = produs pozitiv)

Coordonatele centrului de masă al plăcii sunt:

$$x_G = \frac{\sum_{i=1}^{3} x_{Gi} A_i}{\sum_{i=1}^{3} A_i} = \frac{x_{G1}A_1 + x_{G2}A_2 + x_{G3}(-A_3)}{A_1 + A_2 - A_3} = \frac{\left(33 + \frac{16}{3}\right) R^{\cancel{3}}}{(51-2\pi)\cancel{R^2}} =$$

$$= \frac{115}{3} \cdot \frac{1}{51-2\pi} \cdot R \cong \frac{115}{134,15} R = 0,857 R$$

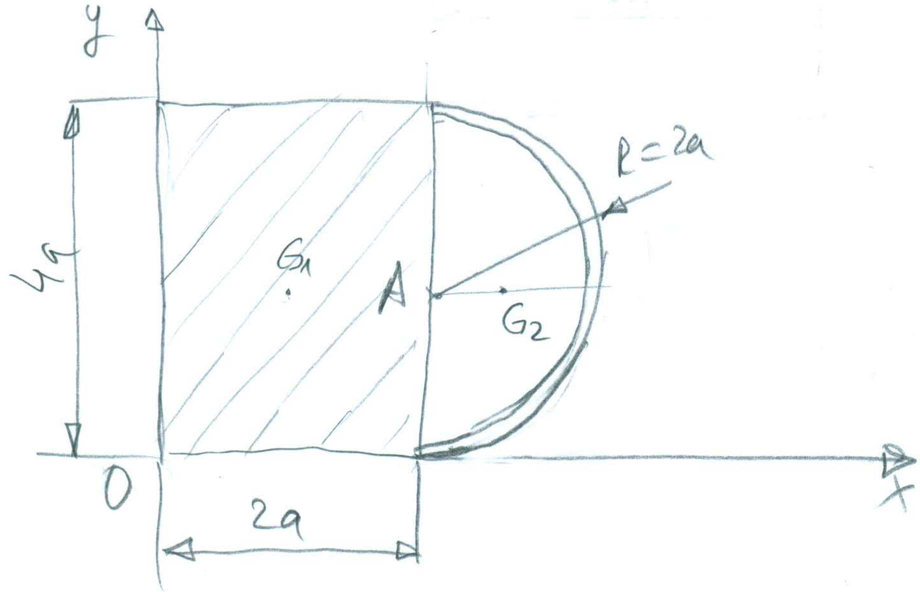
$$y_G = \frac{\sum_{i=1}^{3} y_{Gi} A_i}{\sum_{i=1}^{3} A_i} = \frac{y_{G1}A_1 + y_{G2}A_2 + y_{G3}(-A_3)}{A_1 + A_2 - A_3} = \frac{(126-6\pi) R^{\cancel{3}}}{(51-2\pi)\cancel{R^2}} =$$

$$= \frac{107,15}{44,71} R = 2,39 R.$$

Centrul de masă G al plăcii poate fi figurat pe desen așa cum se arată în figură. Poziția sa trebuie să fie în așa fel încât suprafața corpului să fie distribuită uniform în jurul lui. Dacă ne imaginăm că sprijinim placa în centrul de masă, ea trebuie să stea în echilibru. Dacă centrul de masă rezultă într-o margine a corpului înseamnă ca s-a greșit la calcule.

Pentru a deprinde metoda, vă propun următoarele două probleme pentru a încerca să le rezolvați.

3 Se consideră corpul din desen format dintr-o placă dreptunghiulară de densitate $\rho_A [\frac{kg}{m^2}]$ și o bară semicirculară sudată de ea, de densitate $\rho_L [\frac{kg}{m}]$. Să se determine centrul de masă al corpului.



Corpul se compune din două zone și anume:

Zona 1 Placa dreptunghiulară omogenă de dimensiunile 2a și 4a având densitatea $\rho_A [\frac{kg}{m^2}]$
Masa plăcii este $M_1 = 8a^2 \rho_A [kg]$

Zona 2 Bara semicirculară omogenă de rază $R = 2a$ și densitate $\rho_L [\frac{kg}{m}]$. Masa barei este

$M_2 = \pi R \rho_L = \pi \cdot 2a \cdot \rho_L [kg]$.

Centrul de masă G_1 al plăcii, are coordonatele

$x_{G_1} = a \quad y_{G_1} = 2a$.

Centrul de masă al barei este notat G_2.
Se calculează mai întâi segmentul AG_2 cu formula

$$AG_2 = \frac{R \sin \alpha}{\alpha} = \frac{2a \sin \frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2 \cdot 2a \cdot 1}{\pi} = \frac{4a}{\pi}.$$

Coordonatele centrului de masă vor fi:

$$x_{G_2} = 2a + \frac{4a}{\pi} \qquad y_{G_2} = 2a.$$

Deoarece corpul este format dintr-o placă și o bară, formulele de calcul a coordonatelor centrului de masă sunt:

$$x_G = \frac{x_{G_1} M_1 + x_{G_2} M_2}{M_1 + M_2}$$

$$y_G = \frac{y_{G_1} M_1 + y_{G_2} M_2}{M_1 + M_2}.$$

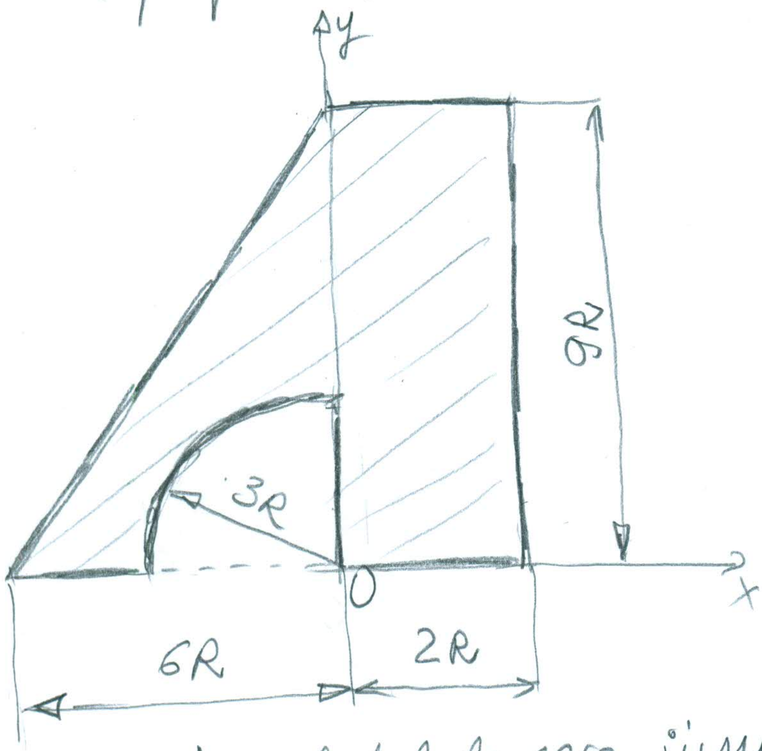
Rezultă

$$x_G = \frac{a \cdot 8a^2 \rho_A + \left(2a + \frac{4a}{\pi}\right) 2\pi R \rho_L}{8a^2 \rho_A + 2\pi R \rho_L}.$$

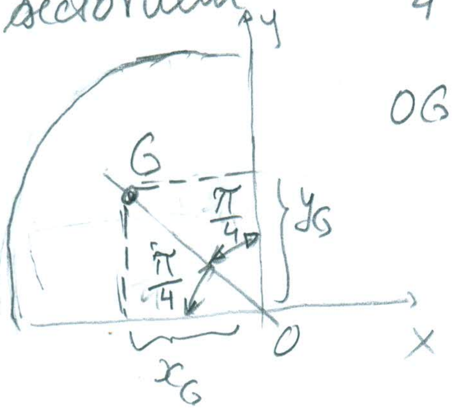
$$y_G = \frac{2a \cdot 8a^2 \rho_A + 2a \cdot 2\pi R \rho_L}{8a^2 \rho_A + 2\pi R \rho_L}.$$

<u>Observație</u> Corpul are o axă de simetrie paralelă cu axa Ox și care trece prin G_1 și G_2.

(1)

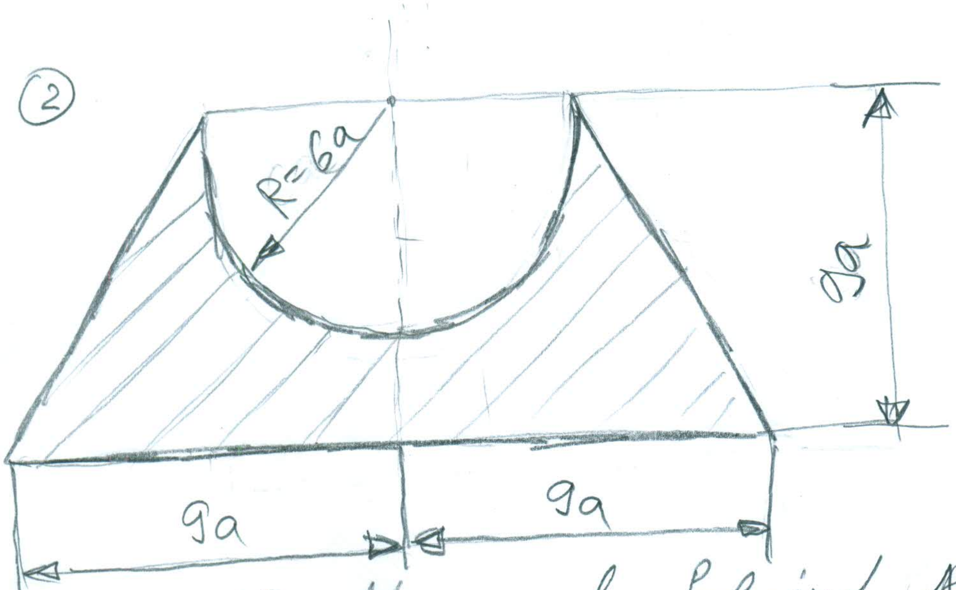


Indicație. La sfertul de cerc, jumătate din unghiul sectorului este $\frac{\pi}{4}$.



$$OG = \frac{2}{3}\,\frac{3R\sin\frac{\pi}{4}}{\frac{\pi}{4}}$$

(2)



Indicație: Alegeți reperul folosind simetria plăcii.