Seminariile 10 și 11

Un punct material are legea de mișcare

$$x(t) = 4t$$
$$y(t) = 16t^2 - 4 \qquad t \in [0, +\infty)$$

să se determine:

1. ecuația analitică a traiectoriei și să se reprezinte grafic;
2. viteza și accelerația punctului;
3. caracterul mișcării;
4. raza de curbură a traiectoriei
5. accelerația normală;
6. accelerația tangențială;
7. pentru $t = \frac{1}{2}$ s să se deseneze viteza și accelerația punctului cu componentele lor.

1. Ecuația analitică a traiectoriei se obține eliminând timpul între $x(t)$ și $y(t)$. Din ecuația $x(t) = 4t$ rezultă

$$t = \frac{x(t)}{4}.$$

Înlocuim această expresie a lui t în $y(t)$ și se obține ecuația analitică a traiectoriei de forma:

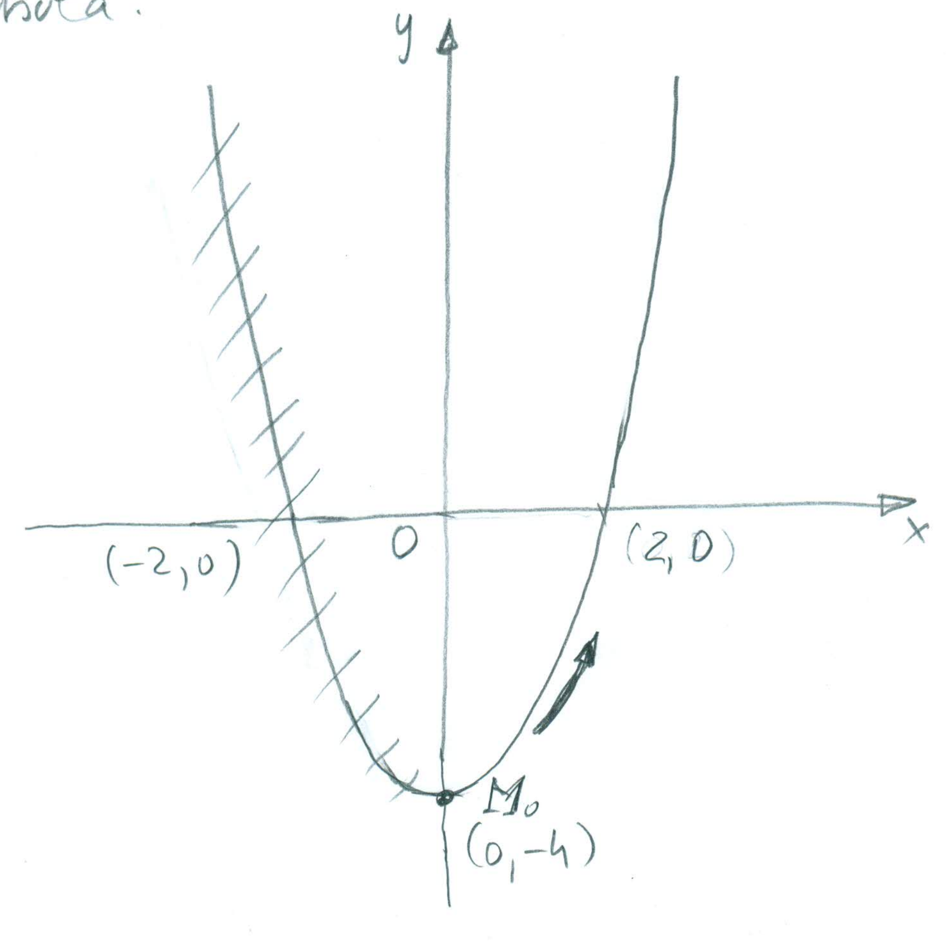
$$y = x^2 - 4.$$

Această ecuație este ecuația unei parabole ce are axa Oy ca axă de simetrie. Intersecțiile cu axele sunt

$$x = 0 \quad y = -4$$

$$y = 0 \quad x = \pm 2$$

În figura următoare este desenată parabola.



Deoarece $t \geq 0$ rezultă că $x = 4t \geq 0$, deci punctul se va afla întotdeauna numai pe ramura din dreapta a parabolei. Ramura din stânga nu face parte din traiectorie și o vom hașura.

În momentul $t=0s$ punctul se află în poziția M_0 de coordonate

$$x=0 \quad y=-4,$$

adică în vârful parabolei și pleacă pe ramura din dreapta așa cum arată săgeata.

Întrucât $x(t)=4t \geq 0$ este o funcție crescatoare, rezultă că punctul nu se mai întoarce pe traiectorie deoarece, dacă s-ar întâmpla acest lucru, coordonata $x(t)$ ar trebui să scadă.

În concluzie, studiind legea de mișcare a punctului s-au obținut următoarele informații:

a) traiectoria este o ramură de parabolă

b) punctul pornește din vârful parabolei pe ramura din dreapta

c) punctul nu se mai întoarce pe traiectorie către vârful parabolei.

2. Viteza punctului se determină folosind relația de calcul utilizată în coordonate carteziene

$$\vec{v} = \dot{x}(t)\,\bar{i} + \dot{y}(t)\,\bar{j}$$

$$\dot{x}(t) = \frac{dx(t)}{dt} = 4$$

$$\dot{y}(t) = \frac{dy(t)}{dt} = 32t$$

Viteza are expresia analitică vectorială

$$\vec{v} = 4\vec{i} + 32t\,\vec{j}\ \left[\frac{m}{s}\right]$$

iar modulul vitezei este

$$|\vec{v}| = \sqrt{4^2 + (32t)^2}\ \left[\frac{m}{s}\right]$$

Faptul că modulul vitezei este o funcție crescătoare, conduce la concluzia că mișcarea este accelerată.

Deoarece funcția $|\vec{v}| = \sqrt{16 + 1024t^2}$ nu are o creștere liniară în raport cu t, mișcarea nu este uniform accelerată.

Accelerația punctului se determină folosind relația de calcul utilizată în coordonate carteziene

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \ddot{x}(t)\vec{i} + \ddot{y}(t)$$

cu

$$\ddot{x}(t) = \frac{d\dot{x}(t)}{dt} = 0$$

$$\ddot{y}(t) = \frac{d\dot{y}(t)}{dt} = 32.$$

Accelerația are expresia analitică vectorială

$$\bar{a} = 32\vec{j}\ \left[\frac{m}{s^2}\right] \quad \text{cu} \quad |\bar{a}| = 32\left[\frac{m}{s^2}\right]$$

<u>Observație</u> Deși modulul accelerației este constant, mișcarea nu este uniform accelerată cum, greșit, s-ar putea crede. Mișcarea este uniform accelerată numai dacă componenta tangențială $\vec{a}_\tau$ este constantă în modul.

3. Caracterul mișcării se determină pe baza semnului produsului scalar $\vec{v}\cdot\vec{a}$.

Dacă $\vec{v}\cdot\vec{a} > 0$ mișcarea este accelerată

Dacă $\bar{v}\cdot\vec{a} = 0$ mișcarea este uniformă

Dacă $\vec{v}\cdot\vec{a} < 0$ mișcarea este încetinită.

În cazul nostru

$$\vec{v}\cdot\vec{a} = (4\bar{i} + 32t\bar{j})\cdot(32\bar{j}) = 1024t > 0 \quad t\in(0, +\infty)$$

deci mișcarea este accelerată. Acest rezultat se poate obține, după cum s-a văzut, și din analiza modulului vitezei.

4. Raza de curbură a traiectoriei se calculează cu formula

$$R_c = \frac{|v|^3}{|\bar{v}\times\bar{a}|} \quad [m]$$

$$\bar{v}\times\bar{a} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 4 & 32t & 0 \\ 0 & 32 & 0 \end{vmatrix} = 128\,\bar{k}$$

$|\bar{v}\times\bar{a}| = 128$.

Rezultă deci

$$R_C = \frac{\left(\sqrt{4^2+(32t)^2}\right)^3}{128}\ [m]$$

5. Accelerația normală se calculează cu formula:

$$\bar{a}_\nu = \frac{v^2}{R_c}\bar{\nu} = \frac{4^2+(32t)^2}{\left(\sqrt{4^2+(32t)^2}\right)^3}\cdot 128\,\bar{\nu}$$

deci

$$\bar{a}_\nu = \frac{128}{\sqrt{4^2+(32t)^2}}\,\bar{\nu}\left[\frac{m}{s^2}\right]$$

6. Accelerația tangențială se calculează cu formula:

$$\bar{a}_\tau = \pm\sqrt{a^2-a_\nu^2}\,\bar{\tau}\left[\frac{m}{s^2}\right] = \pm\sqrt{32^2-\frac{128^2}{4^2+(32t)^2}}\,\bar{\tau}\left[\frac{m}{s^2}\right]$$

Semnul accelerației tangențiale este, în acest caz, plus deoarece $\bar{\tau}$ și $\bar{v}$ au același sens iar mișcarea este accelerată deci $\bar{a}_\tau$ și $\bar{v}$ au același sens. După efectuarea calculelor, rezultă:

$$\vec{a}_\tau = +\frac{256}{\sqrt{64t^2+1}}\,\bar{\tau}\left[\frac{m}{s^2}\right]$$

Deoarece $\vec{a}_\tau$ nu are mărime constantă, mișcarea nu este uniform accelerată. Acest lucru se poate deduce, după cum s-a văzut, din analiza modului de variație a modulului vitezei, adică dacă acesta variază liniar în timp sau nu.

Observație Deducerea caracterului mișcării din produsul scalar $\vec{v}\cdot\vec{a}$ este de cele mai multe ori mai facilă decât pe baza analizei variației modulului vitezei, mai ales când acesta are o expresie matematică complicată.

7. La momentul $t=\frac{1}{2}$ s punctul se află în poziția

$$\begin{cases} x(\frac{1}{2})=2 \\ y(\frac{1}{2})=0 \end{cases}$$

Viteza punctului la momentul $t=\frac{1}{2}$ s are componentele

$$\dot{x}(\tfrac{1}{2})=4$$

$$\dot{y}(\tfrac{1}{2})=16$$

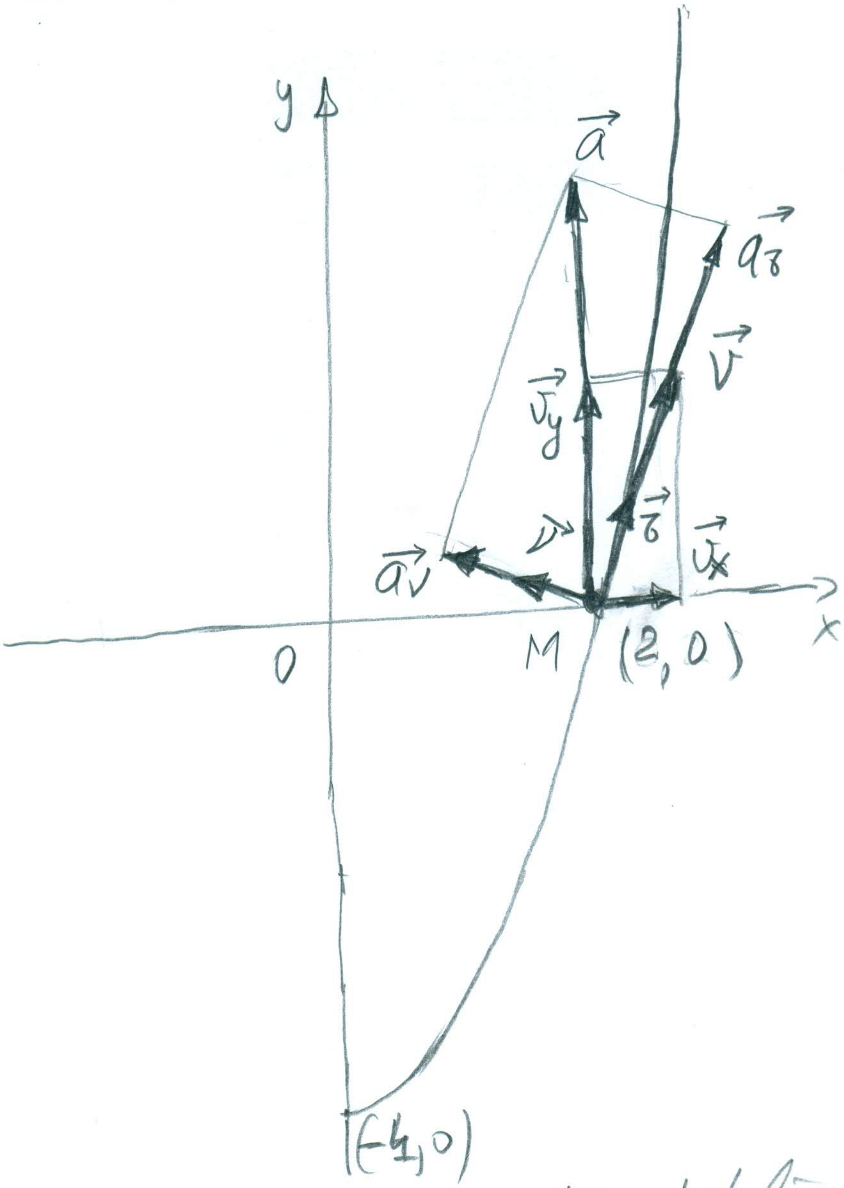
iar vectorul viteză este

$$\vec{v}=4\bar{i}+16\bar{j} \qquad |\vec{v}|=4\sqrt{17}$$

Vectorul accelerație nu depinde de timp

$$\vec{a}=32\bar{j} \qquad |\bar{a}|=32$$

Desenul vitezei și accelerației se vede în figura următoare.



Observații 1) Deși accelerația totală este constantă, accelerațiile normală și tangențială nu sunt constante, iar compunerea lor dă în orice moment, același vector constant $32\vec{j}$.

2) Atenție: pentru a obține viteza și accelerația la un moment dat, nu se derivează coordonatele punctului din acel moment, căci, ele fiind constante, derivatele vor fi nule. Pentru

determinarea vitezei și accelerației la un moment dat t, se calculează expresiile vitezei și accelerației pentru acel moment.

② Un punct material are legea de mișcare în coordonate polare

$$\begin{cases} \rho(t) = 2t \\ \theta(t) = t \end{cases}$$

să se determine:

1. Ecuația traiectoriei și să se reprezinte grafic.
2. viteza și accelerația punctului
3. caracterul mișcării
4. raza de curbură a traiectoriei
5. accelerația normală
6. accelerația tangențială
7. pentru $t = \frac{\pi}{4}$ s să se reprezinte grafic viteza și accelerația cu componentele lor.

1. Ecuația analitică a traiectoriei se obține eliminând timpul t între $\rho(t)$ și $\theta(t)$.

Rezultă

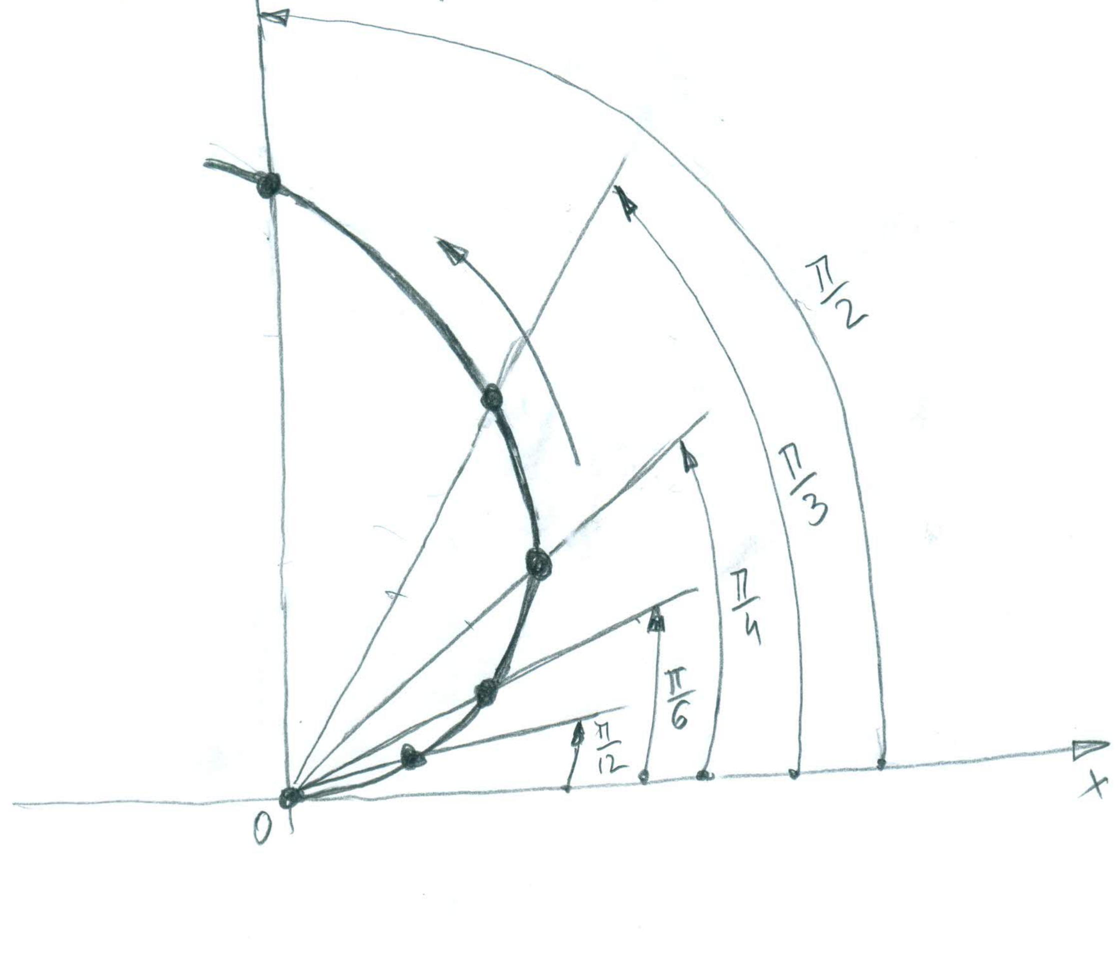
$$\rho = 2\theta$$

care reprezintă o curbă plană numită

curba lui Arhimede sau melcul lui Arhimede.
Pentru a o reprezenta grafic, se face un tabel de forma

$\rho=2\theta$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	π	-----
θ	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	-----

Se desenează o axă Ox și, pentru fiecare valoare a lui θ se trasează o semidreaptă pe care se măsoară un segment de lungimea ρ care corespunde valorii lui θ, așa cum se pot vedea, în tabel, perechile (θ, ρ)



Deoarece θ și ρ cresc continuu, punctul pleacă din originea O și nu se mai întoarce pe traiectorie.

2. Pentru determinarea vitezei punctului trebuie calculate mărimile

$$\dot{\rho} = 2$$
$$\dot{\theta} = 1$$

care se înlocuiesc în formula vitezei

$$\bar{v} = \dot{\rho}\,\bar{i}_\rho + \rho\dot{\theta}\,\bar{i}_\theta$$

și rezultă

$$\vec{v} = 2\,\bar{i}_\rho + 2t\,\bar{i}_\theta \qquad |\bar{v}| = \sqrt{4+4t^2}\left[\frac{m}{s}\right]$$

Modulul vitezei crește, deci mișcarea este accelerată dar nu uniform accelerată deoarece creșterea nu este liniară. Pentru determinarea accelerației punctului trebuie calculate mărimile

$$\begin{cases}\ddot{\rho} = 0\\ \ddot{\theta} = 0\end{cases}$$

care se înlocuiesc în formula accelerației

$$\bar{a} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2)\,\bar{i}_\rho + (2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta})\,\vec{i}_\theta$$

și rezultă

$$\bar{a} = -2t\,\vec{i}_\rho + 4\,\vec{i}_\theta \qquad |\bar{a}| = \sqrt{16+4t^2}\left[\frac{m}{s^2}\right]$$

3. Caracterul mișcării este dat de semnul produsului scalar $\vec{v}\cdot\vec{a}$.

$$\vec{v}\cdot\vec{a} = -4t + 8t = 4t > 0 \quad t \in (0, +\infty)$$

Mișcarea punctului este accelerată, așa cum rezultă și din faptul că modulul vitezei crește.

4. Raza de curbură a traiectoriei se calculează cu formula

$$R_c = \frac{|v|^3}{|\bar{v} \times \bar{a}|} \; [m]$$

$$\bar{v} \times \bar{a} = \begin{vmatrix} \bar{i}_\rho & \bar{i}_\theta & \bar{i}_z \\ 2 & 2t & 0 \\ -2t & 4 & 0 \end{vmatrix} = (8 + 4t^2)\bar{i}_z, \text{ unde}$$

$$\bar{i}_z = \bar{i}_\rho \times \bar{i}_\theta$$

Rezultă

$$R_c = \frac{\left(\sqrt{4 + 4t^2}\right)^3}{|8 + 4t^2|} \; [m]$$

5. Accelerația normală este

$$\bar{a}_\nu = \frac{\bar{v}^2}{R_c}\vec{\nu} = \frac{v^2}{\frac{|v|^3}{|\bar{v}\times a|}}\vec{\nu} = \frac{|\bar{v}\times\bar{a}|}{|v|}\bar{\nu}$$

$$\bar{a}_\nu = \frac{|8 + 4t^2|}{\sqrt{4 + 4t^2}}\bar{\nu} \left[\frac{m}{s^2}\right]$$

6. Accelerația tangențială este

$$\vec{a}_\tau = \pm\sqrt{a^2 - a_\nu^2}\,\bar{\tau} = +\sqrt{16 + 4t^2 - \frac{(8+4t^2)^2}{4+4t^2}}\,\bar{\tau}\left[\frac{m}{s^2}\right]$$

După efectuarea calculelor se obține

$$\bar{a}_\tau = \sqrt{\frac{4t^2}{t^2+1}}\,\bar{\tau} = \frac{2t}{\sqrt{t^2+1}}\,\vec{\tau}\left[\frac{m}{s^2}\right]$$

Semnul lui $\bar{a}_\tau$ este plus deoarece sensul lui $\bar{\tau}$, este la fel cu sensul lui $\bar{v}$ adică în sensul creșterii arcului de curbă, iar sensul lui $\bar{v}$ este același cu sensul lui $\bar{a}_\tau$ deoarece mișcarea este accelerată.

7. Pentru $t = \frac{\pi}{4}[s]$, punctul se află pe traiectorie în poziția dată de

$$\theta\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4}$$

$$\rho\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2}$$

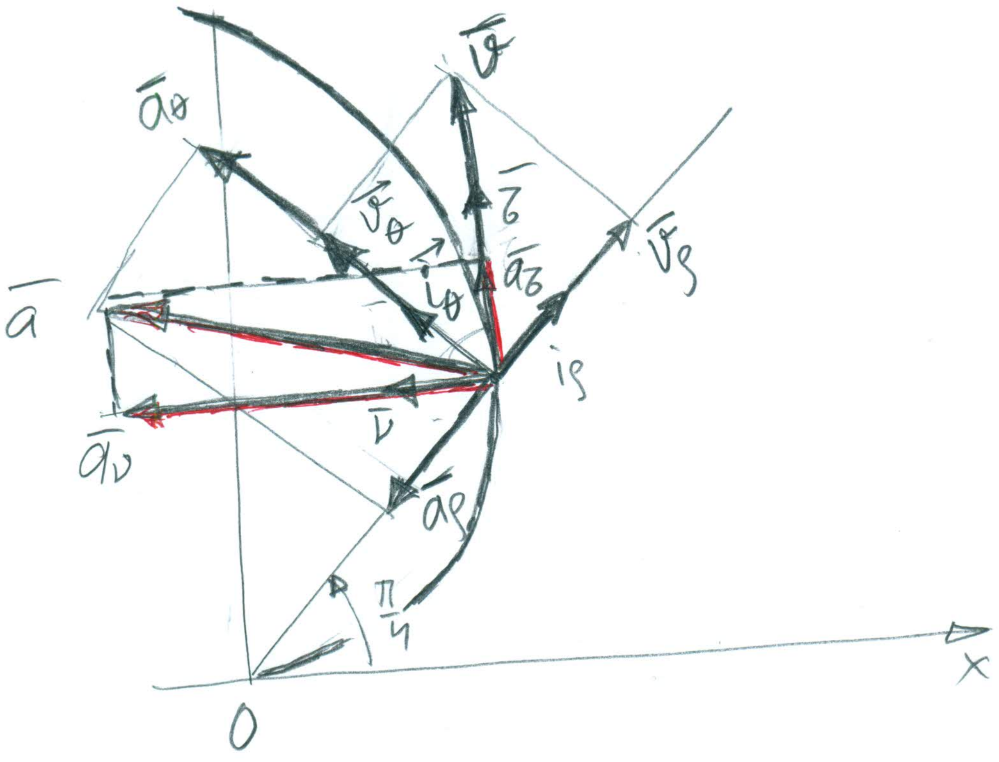
Viteza punctului la acest moment este

$$\vec{v} = 2\bar{i}_\rho + \frac{\pi}{2}\vec{i}_\theta \qquad |\bar{v}| = \sqrt{4 + \frac{\pi^2}{4}}\left[\frac{m}{s}\right]$$

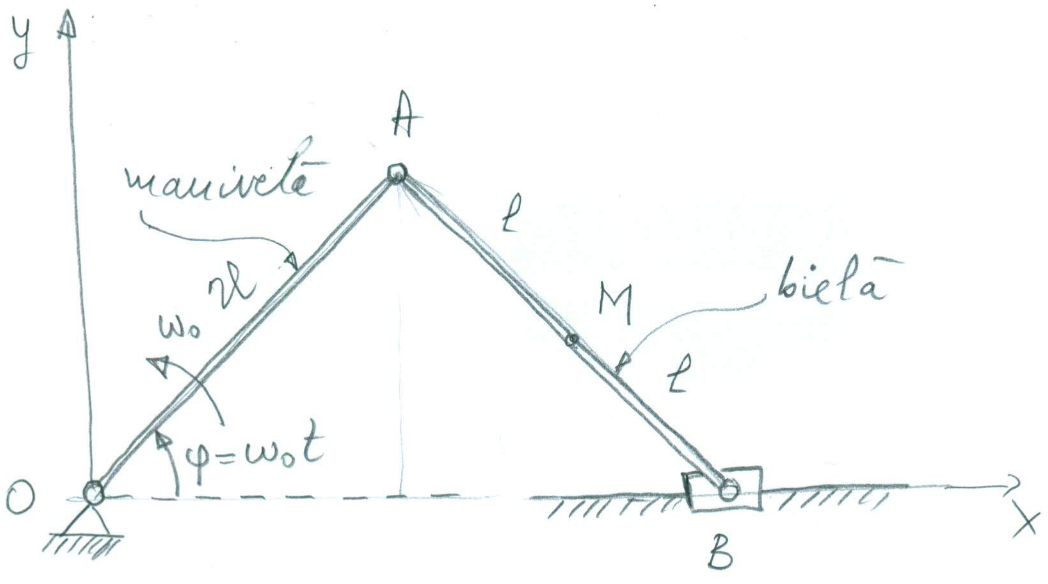
iar accelerația este

$$\bar{a} = -\frac{\pi}{2}\bar{i}_\rho + 4\bar{i}_\theta \qquad |\bar{a}| = \sqrt{\frac{\pi^2}{4} + 16}\left[\frac{m}{s^2}\right]$$

Reprezentarea grafică a vitezei și accelerației pentru momentul $t=\frac{\pi}{4}$ s este în figura următoare.



③ Se consideră mecanismul bielă-manivelă cu brațe egale din desen. Manivela pornește din repaos și se rotește cu viteză unghiulară constantă ω_0 în sens trigonometric direct. Biela și manivela au lungimea $2l$. Să se studieze mișcarea punctelor A, M și B ($AM=MB=l$). La momentul inițial $t=0$, biela și manivela sunt orizontale (unghiul φ este zero).



Unghiul φ este unghiul dintre poziția inițială a manivelei ($t=0$) și poziția curentă. Deoarece $\omega_0 = \dfrac{d\varphi}{dt}$, rezultă

$$d\varphi = \omega_0 dt$$

adică

$$\varphi = \omega_0 t + C$$

Constanta C se determină din condiția inițială la $t=0$ $\varphi=0$ și rezultă $C=0$. Prin urmare legea de variație a unghiului φ este

$$\varphi = \omega_0 t.$$

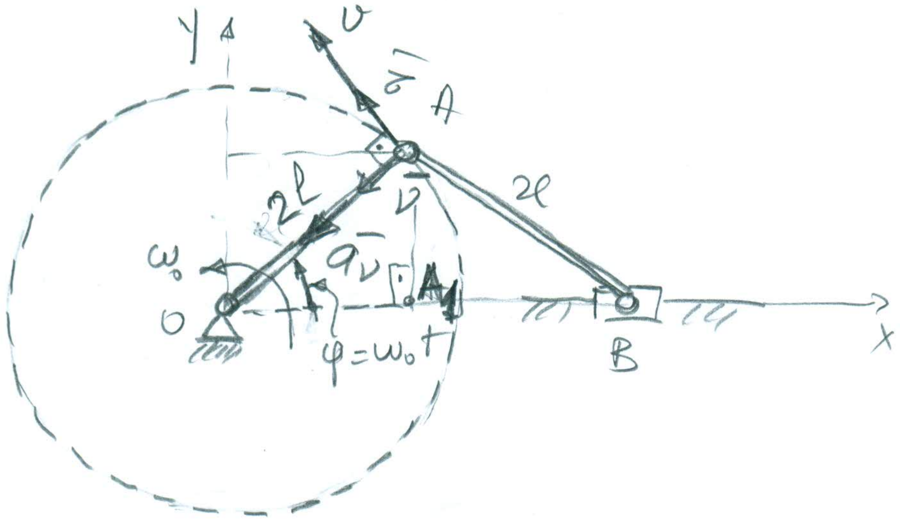
Mișcarea punctului A

Punctul A se mișcă pe un cerc de rază $R=2l$ cu viteză unghiulară constantă ω_0. Din studiul mișcării circulare a punctului rezultă că

$|\bar{v}_A| = \omega_0 \cdot 2l$ și $\bar{v}_A = \omega_0 2l \bar{\tau}$

Accelerația punctului A va avea numai componentă normală

$$\bar{a}_\nu = + \omega_0^2 \cdot 2l \, \bar{\nu}$$



Studiul mișcării punctului A se poate face și în coordonate carteziene. Pentru aceasta se scriu coordonatele punctului A din triunghiul dreptunghic OAA_1:

$$\left.\begin{aligned} x_A &= 2l\cos(\omega_0 t), \\ y_A &= 2l\sin(\omega_0 t). \end{aligned}\right\}$$

Vectorul de poziție al punctului A:

$$\vec{r}_A = 2l\cos(\omega_0 t)\,\bar{i} + 2l\sin(\omega_0 t)\,\bar{j}$$

Pentru a elimina timpul între x_A și y_A în scopul determinării ecuației analitice a traiectoriei, se ridică relațiile la pătrat și se sumează:

$$x_A^2 + y_A^2 = (2l)^2\cos^2(\omega_0 t) + (2l)^2\sin^2(\omega_0 t) = (2l)^2[\cos^2(\omega_0 t) + \sin^2(\omega_0 t)].$$

Rezultă că ecuația analitică a traiectoriei este

$$x_A^2 + y_A^2 = (2l)^2$$

care reprezintă ecuația unui cerc cu centrul în O și rază 2l.

Viteza punctului A are componentele

$$\begin{cases} \dot{x}_A = -2l\omega_0 \sin(\omega_0 t) \\ \dot{y}_A = 2l\omega_0 \cos(\omega_0 t) \end{cases}$$

$$\vec{v} = -2l\omega_0 \sin(\omega_0 t)\bar{i} + 2l\omega_0 \cos(\omega_0 t)\bar{j}$$

$$|\vec{v}| = 2l\omega_0$$

Deoarece modulul vitezei este constant, mișcarea punctului este una circulară și uniformă.

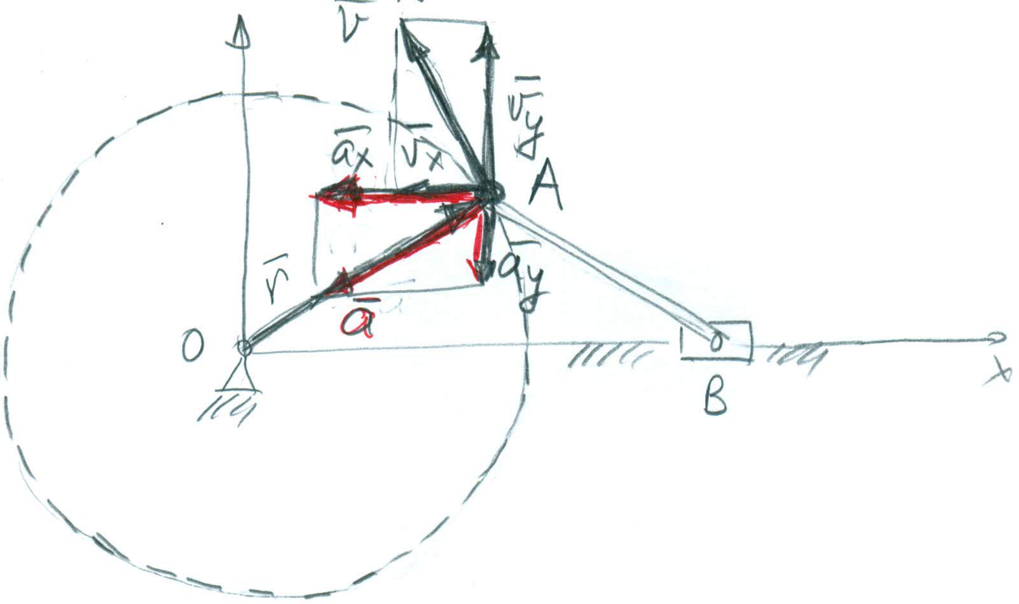
Accelerația punctului A are componentele:

$$\ddot{x}_A = -2l\omega_0^2 \cos(\omega_0 t) \qquad |\bar{a}_A| = 2l\omega_0^2$$

$$\ddot{y}_A = -2l\omega_0^2 \sin(\omega_0 t)$$

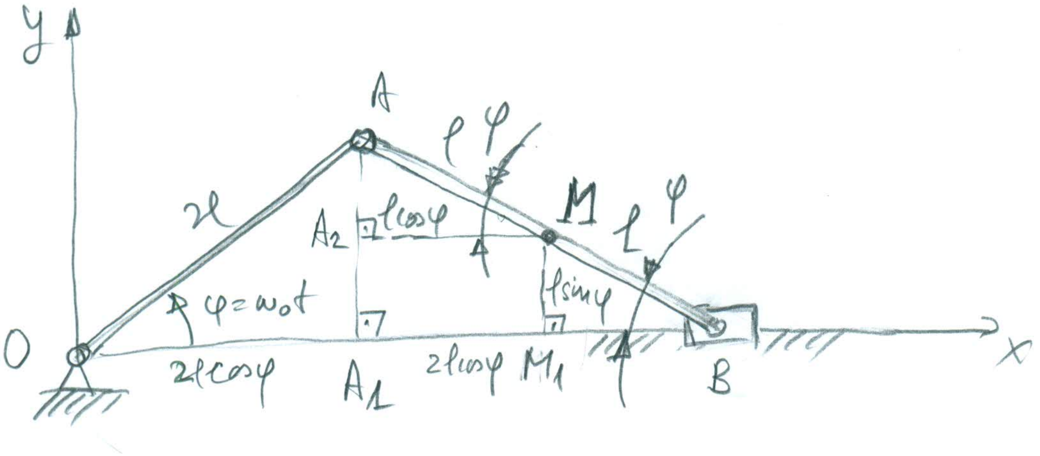
$$\bar{a} = -2l\omega_0^2 \cos(\omega_0 t)\bar{i} - 2l\omega_0^2 \sin(\omega_0 t)\bar{j} = -\omega_0^2 \bar{r}$$

Accelerația punctului A este coliniară cu vectorul de poziție $\bar{r}$ și de sens opus, adică are direcția razei și orientarea către centrul cercului. Vectorul de poziție $\bar{r}$, viteza $\bar{v}$ și accelerația $\bar{a}$ sunt reprezentate în figura următoare.



Mişcarea punctului M

Punctul M se găseşte la mijlocul bielei AB



Pentru a determina vectorul de poziţie al punctului M trebuie calculate coordonatele acestuia.

$$x_M = OA_1 + A_1M_1 = OA\cos\varphi + AM\cos\varphi =$$

$$= 2l\cos(\omega_0 t) + l\cos(\omega_0 t) = 3l\cos(\omega_0 t)$$

$y_M = MM_1 = l \sin\varphi = l\sin(\omega_0 t)$

Vectorul de poziție al punctului M este

$$\bar{r}_M = 3l\cos(\omega_0 t)\,\bar{i} + l\sin(\omega_0 t)\,\bar{j}$$

Pentru a determina ecuația analitică a traiectoriei, se elimină timpul între coordonatele x_M și y_M.

Pentru aceasta, se izolează $\sin(\omega_0 t)$ și $\cos(\omega_0 t)$ care, după ridicare la pătrat și sumare vor face 1.

Avem:

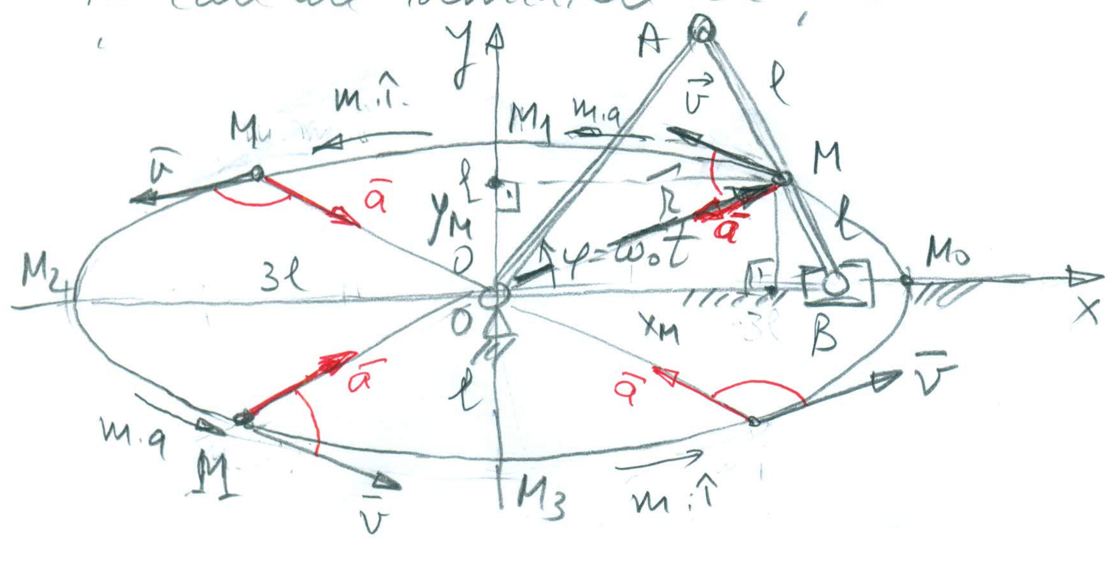
$$\cos(\omega_0 t) = \frac{x_M}{3l}$$

$$\sin(\omega_0 t) = \frac{y_M}{l}$$

După ce ridicăm la pătrat și sumăm, se obține:

$$\frac{x_M^2}{(3l)^2} + \frac{y_M^2}{l^2} = 1$$

Ecuatia este a unei elipse cu centrul în O și care are semiaxele $3l$ și l.



Punctul M pornește din punctul M_0 și parcurge elipsa în sens trigonometric direct.

Viteza punctului M este

$$\vec{v}_M = \dot{\vec{r}}_M = -3l\omega_0 \sin(\omega_0 t)\vec{i} + l\omega_0 \cos(\omega_0 t)\vec{j}$$

$$|\vec{v}_M| = \sqrt{9l^2\omega_0^2\sin^2(\omega_0 t) + l^2\omega_0^2\cos^2(\omega_0 t)} = l\omega_0\sqrt{9\sin^2(\omega_0 t) + \cos^2(\omega_0 t)} =$$

$$= l\omega_0\sqrt{1 + 8\sin^2(\omega_0 t)}\left[\frac{m}{s}\right]$$

Modulul vitezei nu este constant și are o evoluție când crescătoare când descrescătoare dată de funcția $\sin(\omega_0 t)$ deci mișcarea va fi când accelerată când încetinită. Poate fi făcută următoarea analiză:

a) $\omega_0 t = \varphi \in [0, \frac{\pi}{2})$ $\sin^2(\omega_0 t)$ crește de la 0 la 1 deci și $|\vec{v}|$ crește și mișcarea este accelerată pe arcul $\overset{\frown}{M_0 M_1}$

b) $\omega_0 t = \varphi \in [\frac{\pi}{2}, \pi)$ $\sin^2(\omega_0 t)$ scade de la 1 la 0 deci $|\vec{v}|$ scade și mișcarea este încetinită pe arcul $\overset{\frown}{M_1 M_2}$

c) $\omega_0 t = \varphi \in [\pi, \frac{3\pi}{2})$ $\sin^2(\omega_0 t)$ crește de la 0 la 1 deci și $|\vec{v}|$ crește și mișcarea este accelerată pe arcul $\overset{\frown}{M_2 M_3}$

d) $\omega_0 t = \varphi \in [\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$ $\sin^2(\omega_0 t)$ scade de la 1 la 0 deci și $|\vec{v}|$ scade și mișcarea este încetinită pe arcul $\overset{\frown}{M_3 M_0}$

Accelerația punctului M este

$$\vec{a}_M = \dot{\vec{v}}_M = -3l\omega_0^2\cos(\omega_0 t)\bar{i} - l\omega_0^2\sin(\omega_0 t)\bar{j} = -\omega_0^2\bar{r}.$$

Accelerația punctului M este coliniară cu vectorul de poziție și de sens opus acestuia.

$$|\vec{a}_M| = \sqrt{9l^2\omega_0^4\cos^2(\omega_0 t) + l^2\omega_0^4\sin^2(\omega_0 t)} = l\omega_0^2\sqrt{9\cos^2(\omega_0 t) + \sin^2(\omega_0 t)} =$$

$$= l\omega_0^2\sqrt{1 + 8\cos^2(\omega_0 t)}\ \left[\frac{m}{s^2}\right]$$

Caracterul mișcării se poate stabili nu numai prin analiza monotoniei modulului vitezei ci și prin poziția față de zero a produsului scalar $\vec{v}\cdot\vec{a}$.

$$\vec{v}\cdot\vec{a} = \left(-3l\omega_0\sin(\omega_0 t)\right)\left(-3l\omega_0^2\cos(\omega_0 t)\right) + \left(l\omega_0\cos(\omega_0 t)\right)\left(-l\omega_0^2\sin(\omega_0 t)\right) =$$

$$= 9l^2\omega_0^3\sin(\omega_0 t)\cos(\omega_0 t) - l^2\omega_0^3\sin(\omega_0 t)\cos(\omega_0 t) =$$

$$= 8l^2\omega_0^3\sin(\omega_0 t)\cos(\omega_0 t) = 4l^2\omega_0^3\sin(2\omega_0 t)$$

Sunt următoarele situații:

a) $2\omega_0 t = 2\varphi \in [0, \pi) \Rightarrow \omega_0 t = \varphi \in [0, \frac{\pi}{2})$, și $\sin(2\omega_0 t) > 0 \Rightarrow$
$\vec{v}\cdot\vec{a} > 0$ mișcarea este accelerată

b) $2\omega_0 t = 2\varphi \in [\pi, 2\pi) \Rightarrow \omega_0 t = \varphi \in [\frac{\pi}{2}, \pi)$, și $\sin(2\omega_0 t) < 0 \Rightarrow$
$\vec{v}\cdot\vec{a} < 0$ mișcarea este încetinită

c) $2\omega_0 t = 2\varphi \in [2\pi, 3\pi) \Rightarrow \omega_0 t = \varphi \in [\pi, \frac{3\pi}{2})$ și $\sin(2\omega_0 t) > 0 \Rightarrow$
$\vec{v}\cdot\vec{a} > 0$ mișcarea este accelerată

d) $2\omega_0 t = 2\varphi \in [3\pi, 4\pi) \Rightarrow \omega_0 t = \varphi \in [\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$ și $\sin(2\omega_0 t) < 0 \Rightarrow$

$\vec{v} \cdot \vec{a} < 0$ mișcarea este încetinită

S-au regăsit rezultatele obținute prin analizarea monotoniei funcției $|\vec{v}|$.

<u>Observație</u> Când $\vec{v} \cdot \vec{a} > 0$ unghiul dintre $\vec{v}$ și $\vec{a}$ este ascuțit ($\vec{v} \cdot \vec{a} = |\vec{v}| \cdot |\vec{a}| \cos(\vec{v}, \vec{a})$) și mișcarea este accelerată. Când $\vec{v} \cdot \vec{a} < 0$ unghiul dintre $\vec{v}$ și $\vec{a}$ este obtuz și mișcarea este încetinită. Acest aspect este evidențiat în figura anterioară. Dacă unghiul dintre $\vec{v}$ și $\vec{a}$ este ascuțit adică între 0 și $\frac{\pi}{2}$, cosinusul lui este pozitiv și $\vec{v} \cdot \vec{a} > 0$. Dacă unghiul dintre $\vec{v}$ și $\vec{a}$ este obtuz, adică între $\frac{\pi}{2}$ și π cosinusul lui este negativ și $\vec{v} \cdot \vec{a} < 0$.

<u>Mișcarea punctului B</u>

Punctul B se poate mișca numai în lungul axei Ox deoarece culisa pe care se află poate, din punct de vedere constructiv, doar să alunece în lungul acestei axe. Prin urmare punctul B execută o mișcare rectilinie. Coordonata x_B este baza triunghiului isoscel OAB și este

$x_B = OA_1 + A_1B = 2l\cos\varphi + 2l\cos\varphi = 4l\cos(\omega_0 t)$. Vectorul de poziție este:

$\vec{r}_B = 4l\cos(\omega_0 t)\bar{i}$

Punctul B execută deci o mișcare rectilinie oscilatorie armonică cosinusoidală care are:

- amplitudinea $4l$
- faza $\omega_0 t$ $-\omega_0 =$ pulsația $\left[\frac{rad}{s}\right]$ sau $[s^{-1}]$
- faza inițială zero
- perioada $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$ $[s]$
- frecvența $\nu = \frac{\omega_0}{2\pi}$ $[Hz]$; $\nu = \frac{1}{T}$
- elongația $x_B = 4l\cos(\omega_0 t)$

Viteza punctului B este

$$v_B = \dot{x}_B = -4l\omega_0 \sin(\omega_0 t) \quad \vec{v}_B = -4l\omega_0 \sin(\omega_0 t)\,\bar{i}$$

Accelerația punctului B este

$$a_B = \dot{v}_B = -4l\omega_0^2 \cos(\omega_0 t) \quad \vec{a}_B = -4l\omega_0^2 \cos(\omega_0 t)\,\bar{i} = -\omega_0^2 \vec{r}_B$$

Caracterul mișcării poate fi dedus prin analiza monotoniei funcției $|\bar{v}_B| = 4l\omega_0|\sin(\omega_0 t)|$

a) $\omega_0 t = \varphi \in [0, \frac{\pi}{2}) \Rightarrow |\sin(\omega_0 t)|$ crește de la 0 la 1 și $|\bar{v}_B|$ crește deci mișcarea este accelerată

b) $\omega_0 t = \varphi \in [\frac{\pi}{2}, \pi) \Rightarrow |\sin(\omega_0 t)|$ scade de la 1 la 0 și $|\bar{v}_B|$ scade deci mișcarea este încetinită

c) $\omega_0 t = \varphi \in [\pi, \frac{3\pi}{2}) \Rightarrow |\sin(\omega_0 t)|$ crește de la 0 la 1 și $|\bar{v}_B|$ crește deci mișcarea este accelerată

d) $\omega_0 t = \varphi \in [\frac{3\pi}{2}, 2\pi) \Rightarrow |\sin(\omega_0 t)|$ scade de la 1 la 0 și $|\bar{v}_B|$ scade deci mișcarea este încetinită.

Dacă se studiază produsul scalar $\bar{v}\cdot\bar{a} = 8l^2\omega_0^3 \sin(\omega_0 t)\cos(\omega_0 t)$ $= 4l^3\omega_0^3 \sin(2\omega_0 t)$ se obține același rezultat.