Seminarul nr. 1

În mecanică se folosesc două tipuri de mărimi și anume:

1. Mărimi scalare care sunt caracterizate complet de valoarea numerică, de exemplu masa, volumul, lungimea, puterea, lucrul mecanic etc.

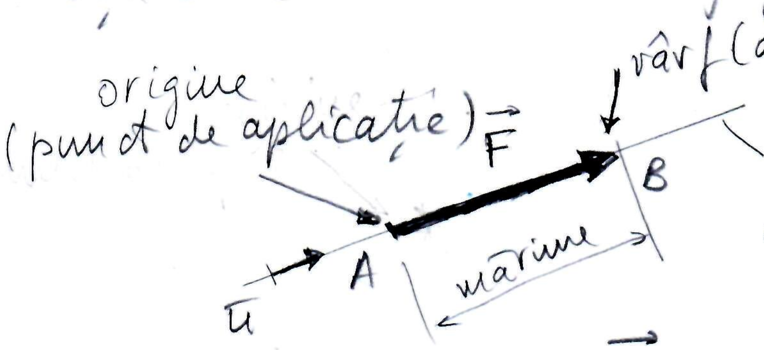
2. Mărimi vectoriale care sunt caracterizate complet de
   - direcție;
   - sens;
   - punct de aplicație;
   - mărime (modul).

Ca exemple de mărimi vectoriale sunt viteza, accelerația, impulsul, momentul cinetic forța etc.

Problema care a trebuit rezolvată de către mecanicieni a constat în găsirea unei metode de a modela în mod convenabil mărimile vectoriale, așa încât să se poată așterne pe hârtie toate elementele care caracterizează o mărime vectorială.

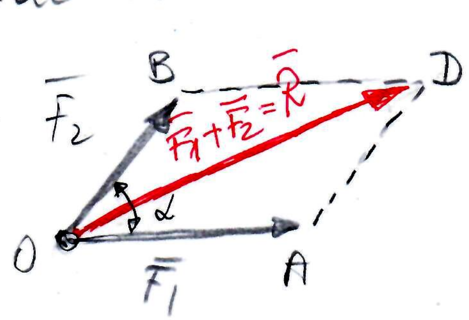
S-a convenit să se facă apel la o

reprezentare grafică sub forma unei săgeți, așa cum se arată în figura de mai jos.



Notație: vectorul $\overrightarrow{AB}$ sau $\overline{AB}$ sau, cu o singură literă, de exemplu $\vec{F}$ sau $\bar{F}$. $\vec{F} = \pm|\vec{F}|\vec{u}$.

O altă problemă a fost aceea a modului în care se operează cu astfel de mărimi. Marele savant sir Isaac Newton (1642-1727) a enunțat principiul paralelogramului care permite sumarea grafică a doi vectori. De exemplu, se consideră două forțe care acționează asupra unui punct material. Cele două forțe pot fi înlocuite cu o singură forță care are același efect și care este egală cu diagonala paralelogramului ale cărui laturi sunt cele două forțe. Această forță se numește vector rezultant (în cazul nostru forță rezultantă) și se scrie:



$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

Vom nota cu α unghiul dintre cele două forțe.

Pe baza teoremei cosinusului se deduce următoarea formulă de calcul a modulului rezultantei $\vec{R}$

$$|\vec{R}| = \sqrt{|\bar{F}_1|^2 + |\bar{F}_2|^2 + 2|\bar{F}_1||\bar{F}_2|\cos\alpha}$$

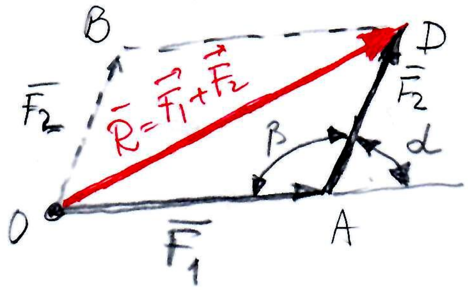
Exemplu: $|\bar{F}_1| = 5N$, $|\bar{F}_2| = 3N$, $\alpha = 60°$.

Rezultă

$$|\bar{R}| = \sqrt{5^2 + 3^2 + 2\cdot 5\cdot 3\cos 60°} = \sqrt{25 + 9 + 30\cdot\frac{1}{2}} =$$

$$= \sqrt{49} = 7N.$$

O variantă a acestei reguli este regula triunghiului. Ea se bazează pe faptul că latura OB este egală cu latura AD a paralelogramului. Se translează forța $\bar{F}_2$ până când originea vectorului ajunge în punctul A. Aplicând



în triunghiul OAD, rezultă teorema cosinusului

$$|\bar{R}| = \sqrt{|\bar{F}_1|^2 + |\bar{F}_2|^2 - |\bar{F}_1||\bar{F}_2|\cos\beta}.$$

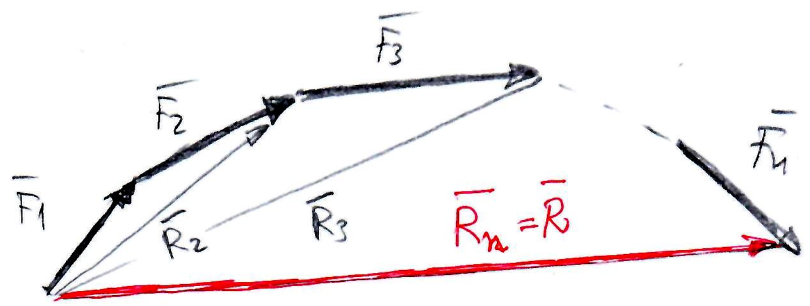
Folosind același exemplu numeric, pentru care unghiul β este $\beta = \pi - \alpha = 180° - \alpha = 120°$, se obține

$$|\vec{R}| = \sqrt{5^2 + 3^2 - 2\cdot 5\cdot 3\cdot\cos 120°} = \sqrt{25 + 9 - 30\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)} =$$

$$= \sqrt{49} = 7N.$$

Regula triunghiului se extrapolează la mai mulți vectori și rezultă regula poligonului.

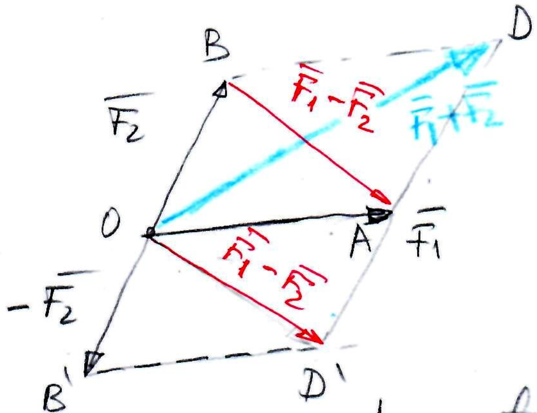
Presupunem că avem n vectori $\overline{F_1}, \overline{F_2}, \dots, \overline{F_n}$. Se desenează vectorii unul după celălalt astfel încât originea unuia să coincidă cu vârful celui anterior, ca în desen.



Dacă se adună vectorii $\overline{F_1}$ cu $\overline{F_2}$ se obține rezultanta $\overline{R_2}$ folosind regula triunghiului. Folosind aceeași regulă, se adună R_2 cu $\overline{F_3}$ și se obține rezultanta $\vec{R_3}$. Procedând în continuare la fel, se obține, în final, rezultanta $\vec{R_n}$ care închide poligonul care are ca laturi forțele $\overline{F_1}, \overline{F_2}, \dots, \overline{F_n}$. Prin urmare $\overline{R_n}$ este chiar suma celor n vectori, adică vectorul rezultant $\vec{R}$:

$$\vec{R} = \vec{F_1} + \vec{F_2} + \dots + \vec{F_n} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F_i}$$

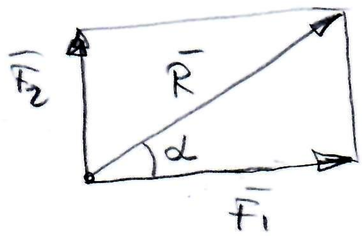
Se poate defini și operația de scădere a vectorilor. Vectorul $\vec{F_1} - \vec{F_2}$ este obținut prin adunarea vectorului $\vec{F_1}$ cu vectorul $-\vec{F_2}$ folosind regula paralelogramului, așa cum se poate vedea în desenul următor.



Vectorul diferență este $\vec{OD'} = \vec{F_1} - \vec{F_2}$. el este egal cu diagonala $\vec{BA}$ a paralelogramului construit atunci când am adunat $\vec{F_1}$ cu $\vec{F_2}$. cu alte cuvinte, vectorul diferență este vectorul orientat de la vârful lui $\vec{F_2}$ către vârful lui $\vec{F_1}$.

Se dau în continuare câteva exemple de utilisare a operațiilor grafice cu vectori.

Observație: În foarte multe situații vectorii cu care se operează sunt perpendiculari, deci paralelogramul devine un dreptunghi.



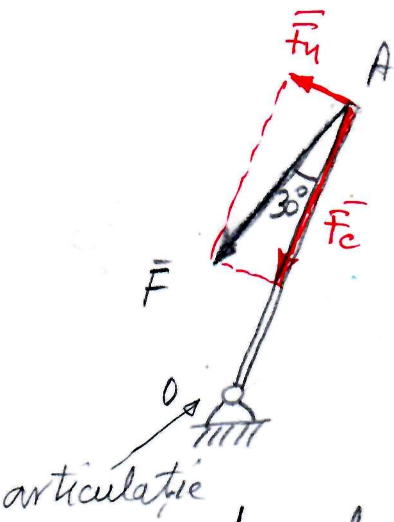
$\vec{R} = \vec{F_1} + \vec{F_2}$

$|\vec{R}| = \sqrt{\vec{F_1}^2 + \vec{F_2}^2}$

$\cos\alpha = \dfrac{|\vec{F_1}|}{|\vec{R}|}$ $\quad \sin\alpha = \dfrac{|\vec{F_2}|}{|\vec{R}|}$

① Se consideră un braț articulat OA acționat în punctul A de o forță $\vec{F}$ care face unghiul de 30° cu brațul. Să se calculese componenta

$\vec{F_n}$ normală la braț și cea coliniară cu brațul $\vec{F_c}$.



Modulul forței $\bar{F}$ este de 4N.

Se descompune forța $\bar{F}$ după o direcție coliniară cu OA și una perpendiculară cu OA. Pentru aceasta se construiește un dreptunghi care are laturile după direcțiile amintite și diagonala forța $\bar{F}$, așa cum se vede în desen.

Forța coliniară cu brațul are mărimea:

$$|\bar{F_c}| = |\bar{F}| \cos 30^\circ = 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}\ N \approx 3{,}46\ N$$

Forța normală la braț are mărimea:

$$|\bar{F_n}| = |\bar{F}| \sin 30^\circ = 4 \cdot \frac{1}{2} = 2N$$

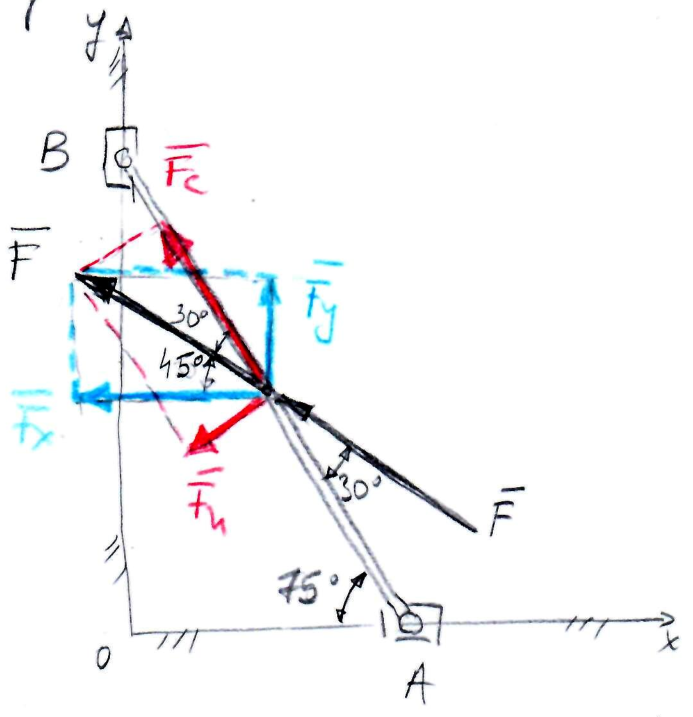
<u>Observație</u>. În inginerie este absolut obligatoriu să „simțim" cam cât înseamnă o anumită valoare numerică. De exemplu, dacă considerăm definiția unei forțe de 1N – este forța care imprimă unei mase de 1kg o accelerație de $1\ m/s^2$ – nu ne ajută prea mult. De aceea, încercăm să facem legătura cu realitatea considerând greutatea unui kilogram. Unei mase de 1 kg îi corespunde o forță de greutate de $1 \cdot g[N] = 1\ kg \cdot 9{,}81 \left[\frac{m}{s^2}\right] = 9{,}81[N] \approx 10[N]$, așa numitul decanewton, notat <u>daN</u>. Deci când ducem în mână 1 kg, noi

sustinem o forță de aproximativ 10N = 1daN. Acest fapt ne poate ajuta să apreciem dacă, de exemplu, o forță de 100 N, este acceptabilă sau nu într-o anumită situație, ea fiind aproximativ greutatea a 10 kg.

Revenind la exemplul nostru, ne punem întrebarea de ce ar putea să ne intereseze componentele $\overline{F_n}$ și $\overline{F_c}$. Componenta $\overline{F_n}$ produce rotația barei în jurul articulației iar componenta $\overline{F_c}$ se utilizează la calculele de rezistență, deoarece ea produce comprimarea barei.

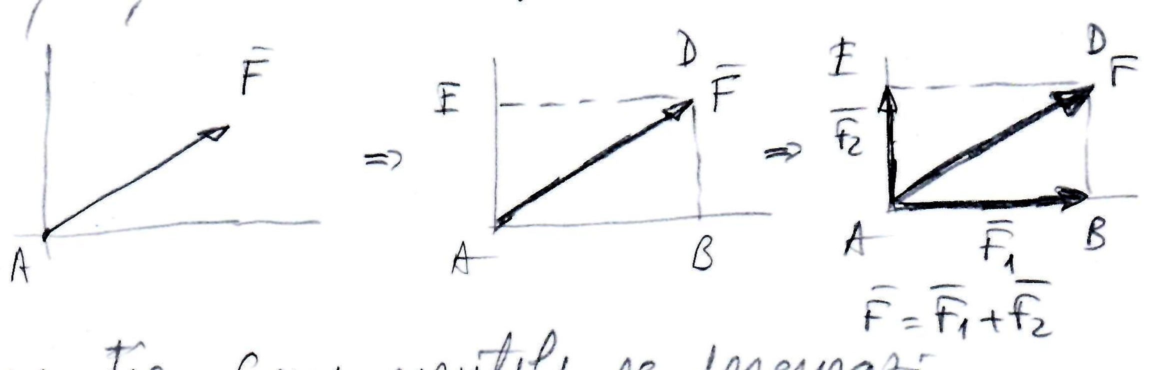
2 Se consideră o bară AB care se sprijină pe două căi de rulare reciproc perpendiculare prin intermediul unor culise oscilante. Asupra barei acționează o forță $\vec{F}$ de 40 N. care face unghiul de 30° cu bara. Să se determine componenta $\overline{F_c}$ din lungul barei, componenta $\overline{F_n}$ perpendiculară pe bară, componenta orizontală $\overline{F_x}$ și componenta verticală $\overline{F_y}$.

Această problemă arată că aceeși forță poate fi descompusă în diverse moduri în funcție de ce componente ne interesează

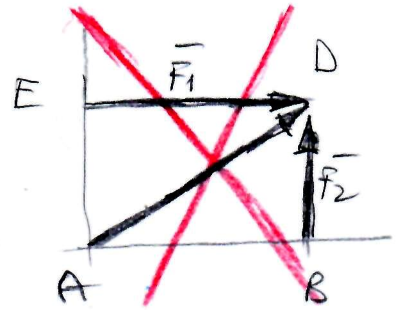


Observație. Se recomandă ca forța să fie translată cu originea vectorului în punctul în care acționează, așa cum s-a procedat în desen.

Pentru a afla componentele unei forțe după două direcții reciproc perpendiculare, se desenează un dreptunghi cu laturile paralele cu cele două direcții și având diagonala forța în discuție.



Observație. Componentele se desenează întotdeauna cu originea în același punct cu originea vectorului și nu ca în desenul următor



NU AȘA !!!

Revenind la problemă, se translează forța $\bar{F}$ cu originea în punctul de pe bară în care acționează și apoi se descompune după o direcție coliniară cu bara și o direcție perpendiculară pe bară. Se obțin componentele $\bar{F_c}$ și $\bar{F_n}$ având mărimile:

$$|\bar{F_c}| = |\bar{F}| \cos 30° = 40 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} N = 20\sqrt{3}\, N = 34{,}64 N$$

$$|\bar{F_n}| = |\bar{F}| \sin 30° = 40 \cdot \frac{1}{2} N = 20 N.$$

Se descompune apoi forța $\bar{F}$ după direcțiile orizontală (Ox) și verticală (Oy) rezultând componentele $\bar{F_x}$ și $\bar{F_y}$, având mărimile:

$$|\bar{F_x}| = |\bar{F}| \cos 45° = 40 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} N = 20\sqrt{2}\, N = 28{,}28 N$$

$$|\bar{F_y}| = |\bar{F}| \sin 45° = 40 \frac{\sqrt{2}}{2} N = 20\sqrt{2}\, N = 28{,}28 N$$

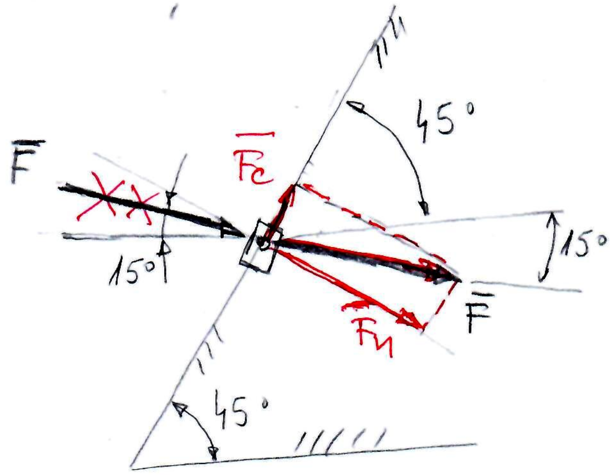
Deci putem scrie

$$\bar{F} = \bar{F_c} + \bar{F_n} = \vec{F_x} + \bar{F_y}.$$

și

$$|\bar{F}| = \sqrt{F_c^2 + F_n^2} = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}.$$

③ Asupra unei culise situată pe o cale de rulare acționează o forță F de mărime 100 N. Să se calculeze componenta normală la calea de rulare și cea coliniară cu calea de rulare.



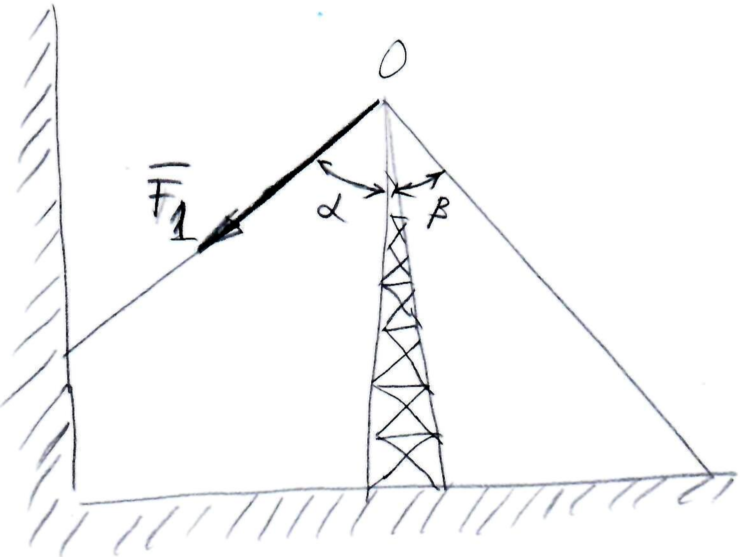
Se translează forța $\overline{F}$ până când originea sa ajunge în punctul de aplicație. Apoi se descompune după direcția căii de rulare și după o direcție perpendiculară pe aceasta, rezultând componentele $\overline{F_c}$ și $\overline{F_n}$. Unghiul dintre forța $\overline{F}$ și calea de rulare rezultă de 60°. Se obțin următoarele mărimi ale componentelor:

$$|\overline{F_c}| = |\overline{F}| \cos 60° = 100 \cdot \frac{1}{2} = 50\,N$$

$$|\overline{F_n}| = |\overline{F}| \sin 30° = 100 \frac{\sqrt{3}}{2} = 50\sqrt{3}\,N = 86{,}60\,N$$

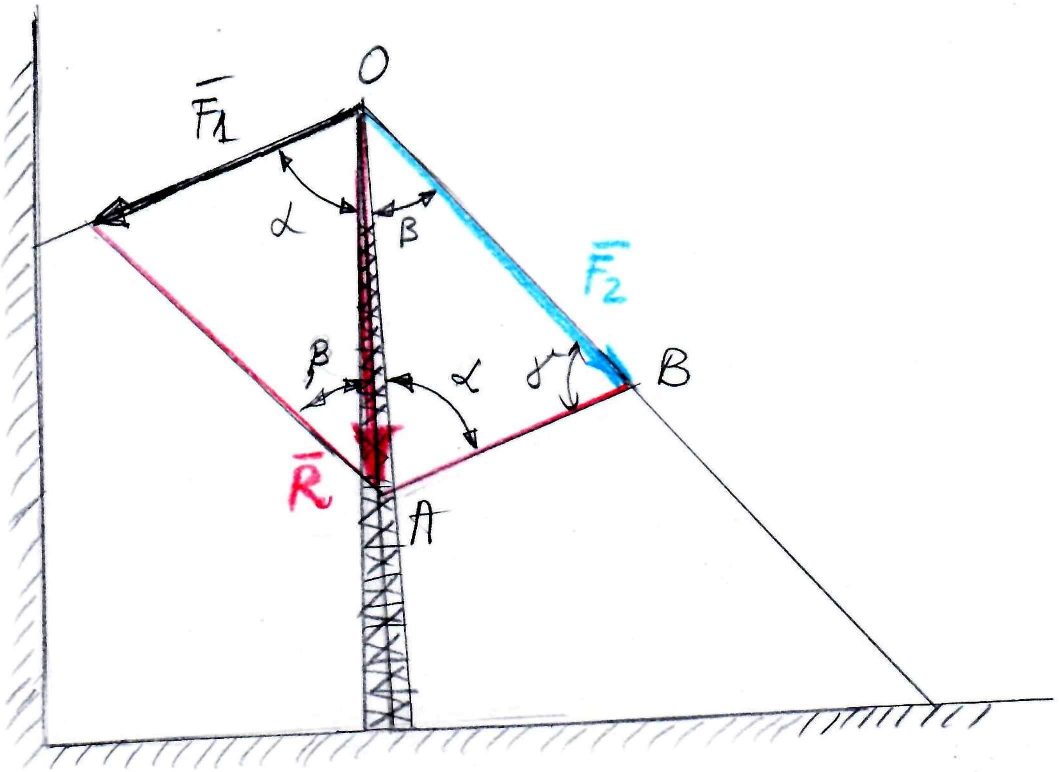
④ Un stâlp este ancorat cu două cabluri așa cum se arată în desen. Se cunosc forța $\overline{F_1}$ din cablul din stânga și unghiurile α și β.

să se determine mărimea forței $\overline{F_2}$ din cablul din dreapta astfel încât rezultanta forțelor $\overline{F_1}$ și $\overline{F_2}$ să fie pe direcție verticală.



Se construiește paralelogramul care are laturile pe direcțiile celor două cabluri și diagonala pe direcție verticală.

Pentru aceasta, se duce o paralelă la cablul din dreapta care se va intersecta cu verticala construită prin vârful stâlpului în punctul A. Apoi, prin punctul A, se duce o paralelă la cablul din stânga până se va intersecta cu cablul din dreapta în punctul B. Distanța $\overrightarrow{OB}$ este chiar forța $\overline{F_2}$ din cablul din dreapta care trebuia determinată, ea fiind găsită, deocamdată, pe cale grafică.



Pentru a determina mărimea forței $\bar{F}_2$ se folosește teorema sinusului în triunghiul OAB, care spune

$$\frac{|\overline{AB}|}{\sin\beta}=\frac{|\overline{OB}|}{\sin\alpha}=\frac{|\overline{OA}|}{\sin\gamma},$$

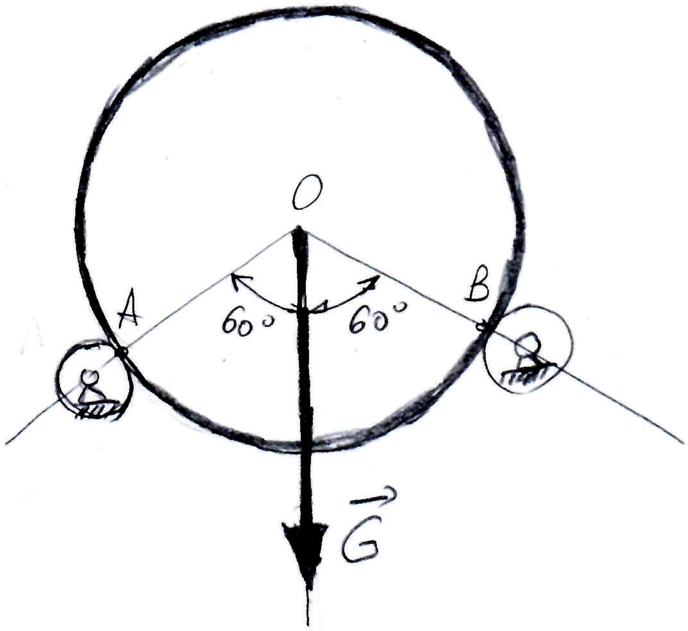
unde $\gamma=\pi-(\alpha+\beta)$. Prin urmare $\sin\gamma=\sin[\pi-(\alpha+\beta)]=$ $=\sin(\alpha+\beta)$. Teorema se scrie acum

$$\frac{|\bar{F}_1|}{\sin\beta}=\frac{|\bar{F}_2|}{\sin\alpha}=\frac{|\bar{R}|}{\sin(\alpha+\beta)},$$

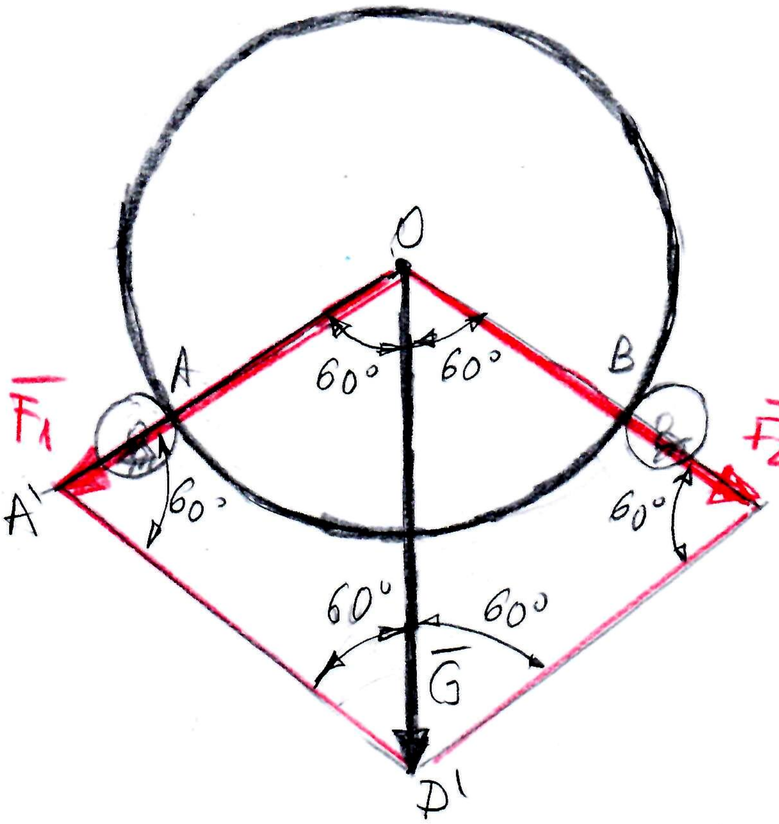
de unde rezultă:

$$|\overline{F_2}| = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} \cdot |\overline{F_1}| \quad \text{și} \quad |\overline{R}| = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\beta} |\overline{F_1}|.$$

(5) Un cilindru de greutate $\overrightarrow{G}$ se sprijină pe două role dispuse simetric la 60° față de verticală. Să se determine mărimea forței care apasă pe fiecare rolă.

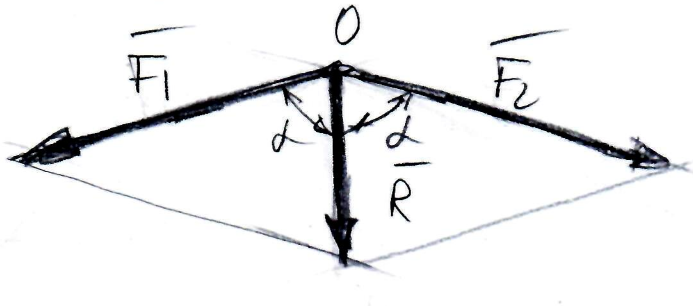


Se construiește paralelogramul care va avea ca diagonală greutatea $\overrightarrow{G}$ și ca laturi cele două forțe componente care acționează asupra rolelor. Pentru aceasta, se trasează din vârful greutății $\overrightarrow{G}$ paralele la direcțiile OA și OB, așa cum se arată în desenul următor.



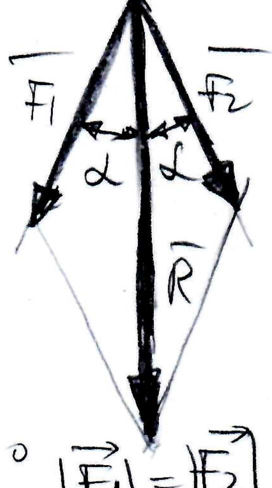
Triunghiurile OA'D' și OB'D' sunt echilaterale și egale, deci $|\overline{F_1}| = |\overline{F_2}| = |\overline{G}|$.

<u>Observație</u>. Cu cât unghiul dintre vectori este mai mare de 120°, cu atât crește mărimea componentelor, devenind mai mare decât resultanta și invers.



$\alpha > 60°$

$|\vec{F_1}| = |\vec{F_2}| > \vec{R}$



$\alpha < 60°$ $|\vec{F_1}| = |\vec{F_2}| < |\vec{R}|$