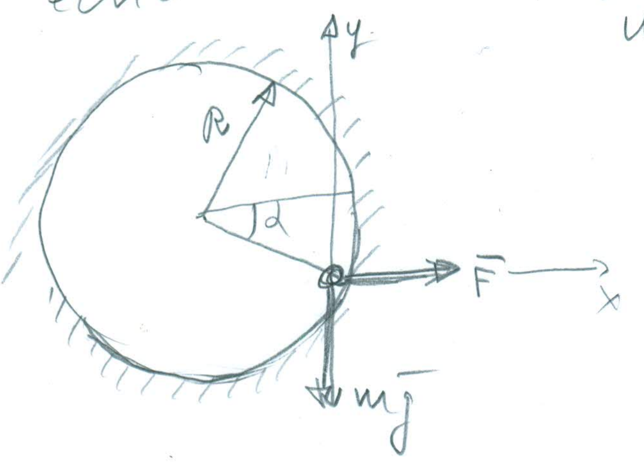
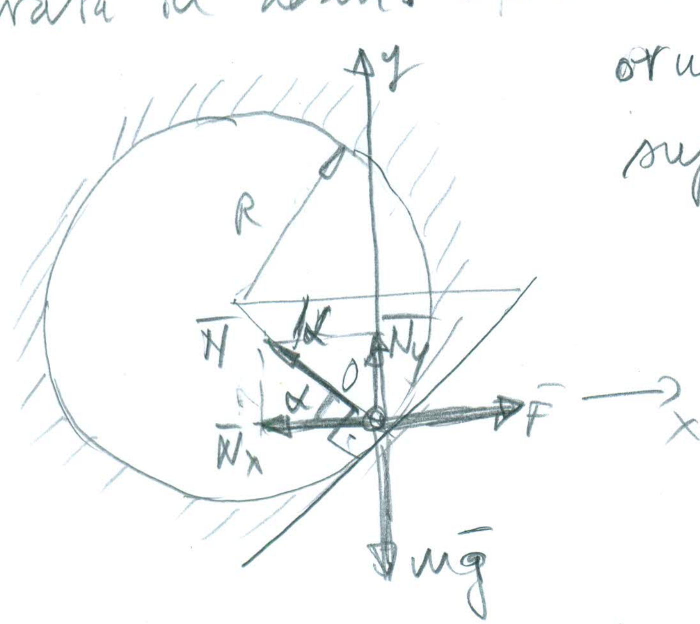
Seminarul nr. 7

① Un punct material de masă m se sprijină pe interiorul unui cerc de rază R, cu frecare neglijabilă. Să se determine mărimea forței $\vec{F}$ astfel încât punctul să rămână în echilibru în poziția din desen dată de unghiul α.



Pentru a determina mărimea forței $\vec{F}$ se consideră mai întâi un reper având originea în punct cu axa Ox orizontală și cu axa Oy verticală după cum se arată în desen. Punctul se sprijină pe interiorul cercului, deci este supus la o legătură numită reazem. Această legătură este considerată ideală și se înlocuiește cu o forță de legătură $\vec{N}$, perpendiculară pe



tangenta la cerc construită în locul unde se sprijină punctul. Sensul ei este în sensul în care, ipotetic, punctul poate să se desprindă de suprafața de sprijin, adică către centrul cercului. Modulul ei este necunoscut. Ecuația de echilibru a punctului este

$$\bar{F} + \bar{N} + m\vec{g} = 0$$

Proiectând această ecuație pe direcțiile axelor reperului xOy se obțin următoarele două ecuații scalare:

$$Ox: \; F - N_x = 0$$

$$Oy: \; -mg + N_y = 0$$

Acest sistem algebric are ca necunoscute forța F care realizează echilibrul și componentele N_x și N_y ale reacțiunii legăturii, deci avem 3 necunoscute și două ecuații. Aparent sistemul este static nedeterminat. Pe de altă parte, se observă că cele două componente ale reacțiunii normale N se pot scrie

$$N_x = N \cos\alpha$$

$$N_y = N \sin\alpha$$

Sistemul de ecuații devine astfel de forma

$$F - N\cos\alpha = 0$$

$$-mg + N\sin\alpha = 0$$

Necunoscutele sunt N și F deci acum sistemul este static determinat având 2 ecuații cu 2 necunoscute.

<u>Observație</u> Se va căuta întotdeauna să nu avem ca necunoscute componentele unei forțe care trebuie determinată ci să le exprimăm în funcție de forța necunoscută folosind funcții trigonometrice. În acest mod, în loc de două necunoscute, avem doar una.

Din sistemul de ecuații de echilibru de mai sus, rezultă

$$N = \frac{mg}{\sin\alpha}$$

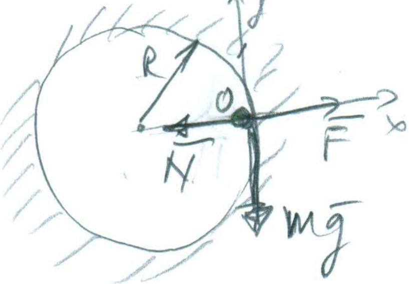
și

$$F = N\cos\alpha = mg\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = mg\,\mathrm{ctg}\,\alpha = \frac{mg}{\mathrm{tg}\,\alpha}$$

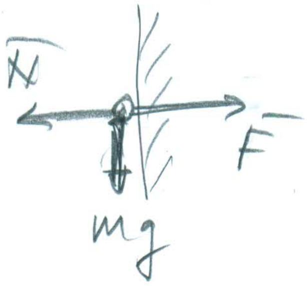
Pentru $\alpha = \frac{\pi}{4}$, $F = mg$.

<u>Observație</u>

Dacă $\alpha = 0$ atunci $\sin\alpha = 0$ și forța F care menține punctul în poziție de echilibru trebuie să fie infinită. Acest fapt arată

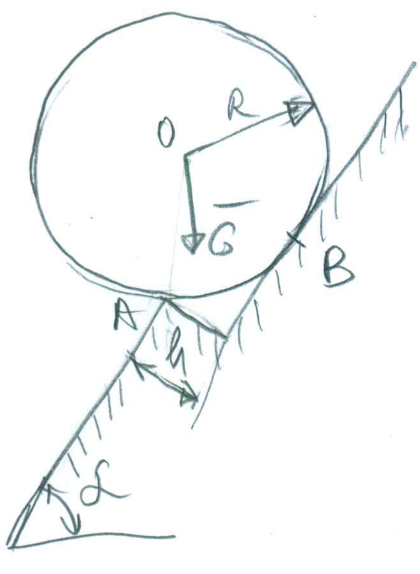


că nu putem menține punctul în echilibru, în această poziție, în lipsa frecării. Din desen se observă că, pe direcția verticală a axei Oy, greutatea punctului mg nu este echilibrată de nicio forță, deci punctul se va deplasa în jos indiferent de mărimea forței $\vec{F}$. Situația este similară cu cea a sprijinirii pe un perete vertical (vezi desenul). Un punct material

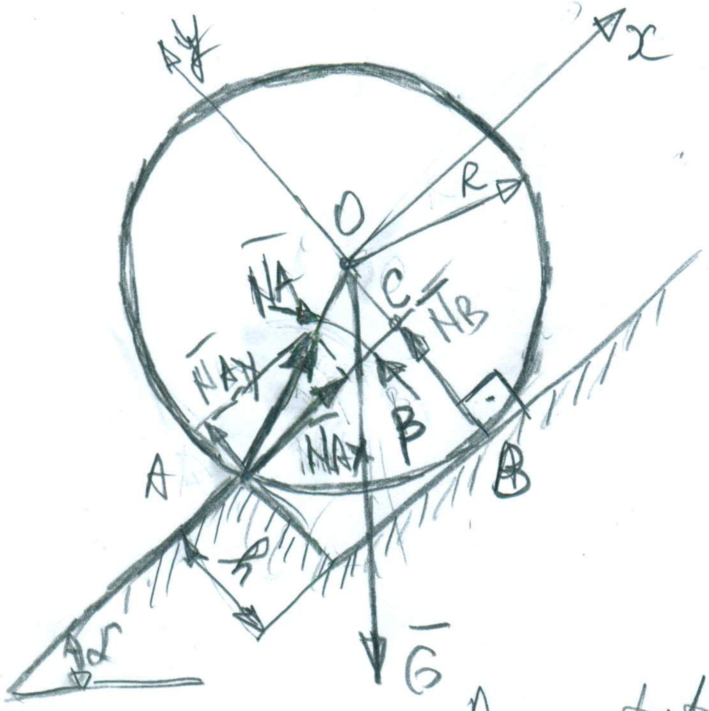


nu poate fi menținut în echilibru pe un perete vertical neted (fără frecare) oricât de mare este forța de apăsare $\vec{F}$.

(2) Se consideră un disc de rază R și greutate $\vec{G}$ care se sprijină pe un plan înclinat cu unghiul α și pe un prag de înălțime h, ca în desen. Să se determine înălțimea h a pragului pentru care discul depășește pragul datorită greutății proprii.



Discul de rază R și greutate $\vec{G}$ se sprijină atât pe planul înclinat cât și pe pragul de înălțime h, deci este supus la două legături denumite reazeme. Acestea trebui înlocuite cu câte o reacțiune normală N perpendiculară pe tangenta comună construită în punctul de contact. În punctul B, planul înclinat este tangent la disc, deci reacțiunea normală $\overline{N}_B$ va fi perpendiculară pe planul înclinat și orientată în sensul în care, ipotetic, discul poate părăsi planul, fiind o legătură unilaterală. În ce privește rezemarea pe pragul de înălțime h, pragul nu admite tangentă în punctul de contact A dar discul admite tangentă în A. Prin urmare, reacțiunea normală din punctul A, notată $\vec{N}_{A}$, se va desena perpendiculară pe tangenta construită în punctul A la disc și deci va avea direcția razei cercului construită în punctul A și, în consecință, direcția ei va trece prin centrul O al cercului.



Se alege apoi un reper xOy cu axa Ox paralelă cu planul înclinat și cu axa Oy perpendiculară pe planul înclinat (vezi desenul).

<u>Observație</u> Atunci când se studiază echilibrul unui disc, se va alege un reper cu polul în centrul discului. În cazul unui

plan înclinat, se va alege o axă paralelă cu planul și una perpendiculară pe plan. În acest caz s-au respectat ambele indicații.

Asupra discului acționează trei forțe: $\bar{G}$, $\bar{N}_A$ și $\bar{N}_B$, toate trei fiind concurente în centrul O al discului. Momentele acestor forțe în raport cu polul O vor fi nule (zero). Ecuația de echilibru va fi numai o ecuație de forțe:

$$\bar{G} + \bar{N}_A + \bar{N}_B = 0.$$

Notăm cu β unghiul dintre direcția planului și forța N_B. Se poate calcula $\sin\beta$ din triunghiul OAC unde $OA = R$ și $OC = R - h$:

$$\sin\beta = \frac{R-h}{R}.$$

Dacă se descompune reacțiunea $\vec{N}_A$ după direcțiile axelor Ox și Oy, se obține

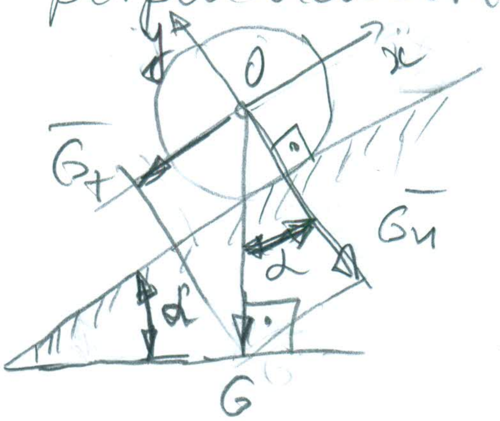
$$\bar{N}_A = \vec{N}_{Ax} + \vec{N}_{Ay} = N_A \cos\beta\, \bar{i} + N_A \sin\beta\, \bar{j}$$

Proiectarea ecuației vectoriale de echilibru de forțe pe direcțiile axelor reperului xOy conduce la următoarele două ecuații scalare de echilibru:

$$N_A\cos\beta - G\sin\alpha = 0$$

$$N_A\sin\beta + N_B - G\cos\alpha = 0$$

Observație: Componentele greutății după direcția planului înclinat și după direcția perpendiculară pe plan sunt $\overline{G_t}$ și respectiv $\overrightarrow{G_n}$. Unghiul α al planului înclinat se regăsește între greutatea $\vec{G}$ și componenta normală $\vec{G_n}$ (vezi desenul).



Cele două unghiuri α sunt egale deoarece au laturile reciproc perpendiculare și sunt ambele ascuțite. Rezultă deci că

$$\vec{G} = \vec{G_t} + \overline{G_n} = -G\sin\alpha\,\vec{i} - G\cos\alpha\,\vec{j}$$

în raport cu reperul xOy.

Necunoscutele sistemului de ecuații scalare de echilibru sunt N_A și N_B. Rezultă

$$N_A = G\frac{\sin\alpha}{\cos\beta}$$

și

$$N_B = G\cos\alpha - N_A\sin\beta = G\cos\alpha - G\frac{\sin\alpha}{\cos\beta}\sin\beta =$$

$$= G\frac{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta}{\cos\beta} =$$

adică

$$\bar{N}_B = G\frac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos\beta}$$

Se

$$(\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha+\beta))$$

Condiția ca discul să depășească pragul de înălțime h revine la anularea reacțiunii N_B, adică

$$N_B = 0.$$

Observație Condiția ca un corp să părăsească reazemul revine în modelul matematic la anularea reacțiunii normale.

Anularea reacțiunii N_B înseamnă

$$\cos(\alpha+\beta) = 0$$

adică

$$\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}.$$

de unde

$$\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha.$$

Înălțimea h a pragului care poate fi depășit de către disc sub acțiunea greutății proprii rezultă din relația

$$\sin\beta = \frac{R-h}{R}$$

care revine la

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \frac{R-h}{R}$$

adică

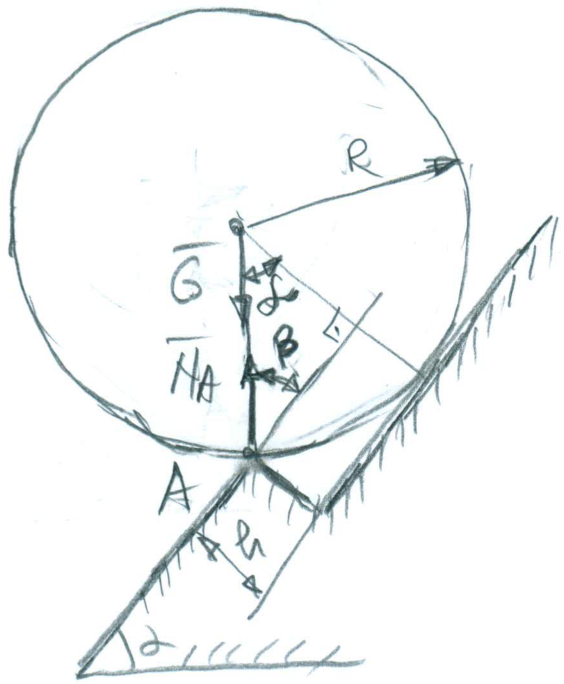
$$\cos\alpha = \frac{R-h}{R}$$

deoarece $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \cos\alpha$.

Rezultă că

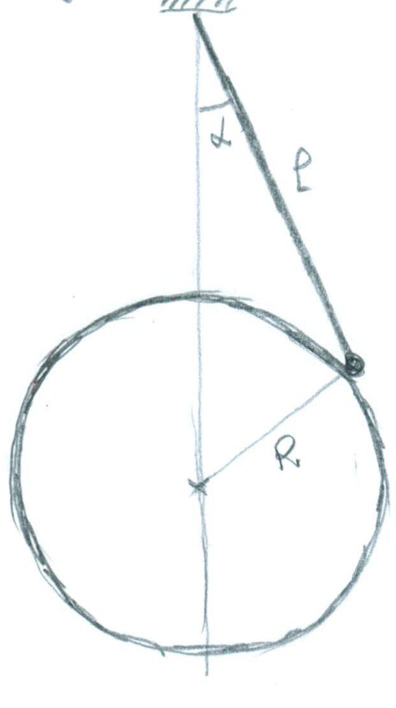
$$h = R(1-\cos\alpha)$$

Dacă h este mai mic decât această valoare discul trece de prag, iar dacă h este mai mare decât această valoare discul nu trece de prag.

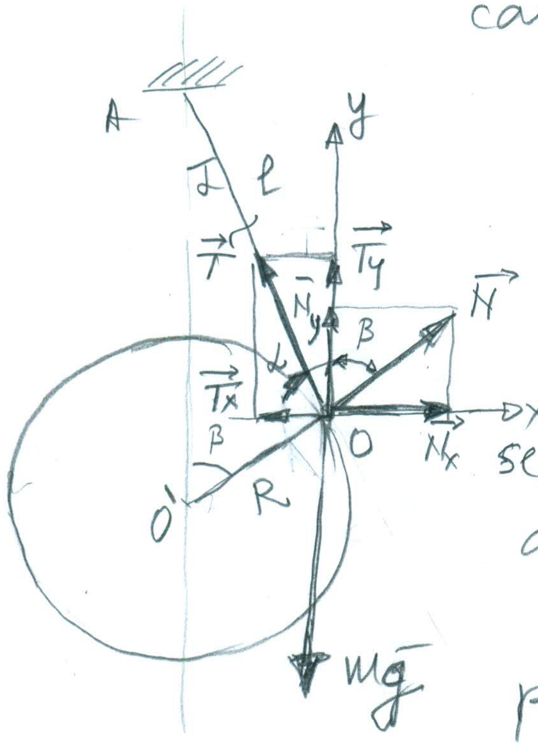


Situatia la limită este reprezentată în figura alăturată când $\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$, $N_B=0$ iar $\overline{N_A}$ și $\overline{G}$ sunt coliniare.

③ Un punct material de masă m este prins cu un fir ideal de lungime ℓ și se sprijină pe un disc lucios de rază R. Firul face cu verticala unghiul α. Să se calculeze tensiunea din fir și reacțiunea din reazem.



Pentru a determina reacțiunile celor două legături se desenează forțele care înlocuiesc legăturile și transformă punctul, din unul supus la legături în unul liber. Firul se înlocuiește cu o forță denumită tensiune în fir $\vec{T}$ care are:



1. direcția firului
2. sensul spre punctul de ancorare
3. modulul necunoscut.

Reazemul dintre fir și disc se înlocuiește cu o forță de legătură $\bar{N}$ care are

1. direcția perpendiculară pe tangenta la cerc în punctul de contact deci este coliniară cu raza cercului construită în punct
2. sensul în sensul desprinderii punctului de pe disc, legătura fiind unilaterală
3. modulul necunoscut.

Se alege un reper xOy cu polul O în punct așa cum se arată în desen. Se desenează cele două forțe de legătură și greutatea punctului. Ecuația vectorială de echilibru este:

$$m\vec{g}+\vec{N}+\vec{T}=0$$

Această ecuație vectorială se proiectează pe axele reperului ales și se obțin două ecuații scalare de echilibru:

$$N_x - T_x = 0$$

$$N_y + T_y - mg = 0$$

Sub această formă sistemul are patru necunoscute și nu poate fi rezolvat. Din desen rezultă că

$$N_x = N\sin\beta \quad N_y = N\cos\beta$$

$$T_x = T\sin\alpha \quad T_y = T\cos\alpha$$

Unghiul β se calculează aplicând teorema sinusului în triunghiul OAO':

$$\frac{R}{\sin\alpha}=\frac{l}{\sin\beta}=\frac{O'A}{\sin\gamma} \Rightarrow \sin\beta=\frac{l\sin\alpha}{R}$$

în care s-a notat unghiul $\widehat{AOO'}$.

Ecuațiile scalare de echilibru conțin acum numai necunoscutele T și N și au forma

$$N\sin\beta - T\sin\alpha = 0$$

$$N\cos\beta + T\cos\alpha - mg = 0$$

Din prima ecuație se obține

$$N = T\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$$

care se introduce în a doua ecuație:

$$T\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}\cos\beta + T\cos\alpha = mg$$

$$T \cdot \frac{\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}{\sin\beta} = mg.$$

$$T \cdot \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\beta} = mg$$

$$T = mg\,\frac{\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$$

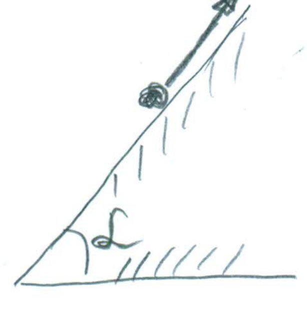
Reacțiunea normală N este

$$N = mg\,\frac{\cancel{\sin\beta}}{\sin(\alpha+\beta)} \cdot \frac{\sin\alpha}{\cancel{\sin\beta}} = mg\,\frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$$

Dacă triunghiul OAO' este dreptunghic cu unghiul drept în O, atunci $\alpha+\beta = 90°$ și $\sin(\alpha+\beta) = 1$. În acest caz particular, rezultă

$$N = mg\sin\alpha \qquad T = mg\sin\beta$$

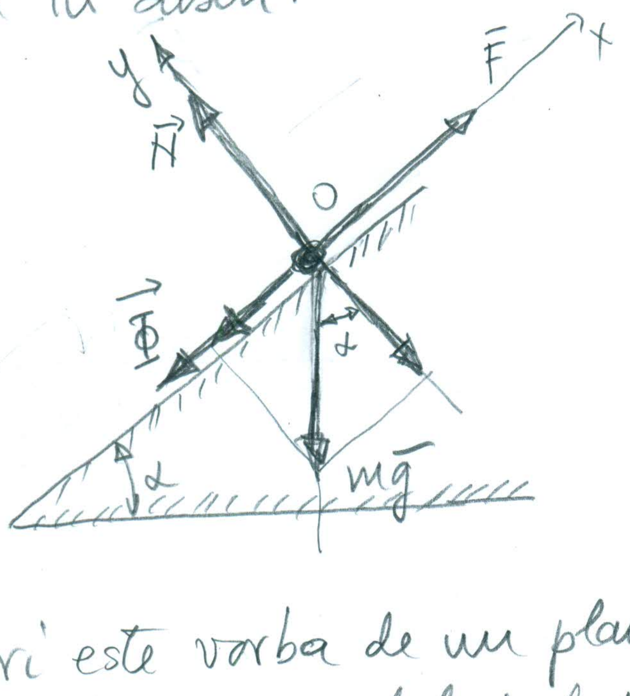
(4) Un punct material de masă m se găsește pe un plan înclinat aspru, unghiul planului fiind α. Între ce limite poate varia mărimea



forței $\vec{F}$ orientată în lungul planului astfel încât punctul să rămână în echilibru (vezi desenul). Coeficientul de frecare de alunecare este μ.

Se desenează mai întâi punctul material liber, adică cu reazemul înlocuit cu reacțiunea normală $\vec{N}$ și forța de frecare $\vec{F_f}$.

Forța de frecare poate fi orientată spre baza planului înclinat dacă punctul, sub acțiunea forței $\overline{F}$, tinde să urce sau, dacă forța $\overline{F}$ este mică, și punctul are tendința de a coborâ, spre partea superioară a planului. Vom considera prima situație când forțele arată ca în desen.



Se alege un reper cu polul în punct, cu axa Ox în lungul planului și cu axa Oy perpendiculară pe plan. Acest mod de a alege reperul se va prefera ori de câte ori este vorba de un plan înclinat. Se descompune greutatea punctului după direcția planului și după normala la plan. Unghiul dintre greutate și componenta normală este egal cu unghiul α al planului. Ecuația vectorială de echilibru este

$$\vec{F} + m\vec{g} + \vec{N} + \vec{\Phi} = 0$$

Această ecuație se proiectează pe axele reperului și rezultă următoarele două ecuații scalare:

$$|F| - |\Phi| - mg\sin\alpha = 0$$

$$|N| - mg\cos\alpha = 0$$

Necunoscutele sunt $|F|, |N|$ și $|\Phi|$. Deoarece punctul nu este în echilibru la limită, adică forța de frecare nu are valoarea maximă $\mu|N|$ ci are o valoare cuprinsă între zero și valoarea maximă. De aceea forța de frecare satisface inegalitatea

$$|\Phi| \leq \mu|N|.$$

Observații ① De cele mai multe ori faptul că forțele din ecuațiile scalare de echilibru sunt în modul este subânțeles și, din punct de vedere al grafiei, nu mai apar cele două linii verticale care marchează modulul unei mărimi.

② In cazul în care echilibrul nu este la limită, trebuie resolvat un sistem de ecuații și inecuații, fapt care de multe ori este dificil.

Din a doua ecuație scalară de echilibru, resultă

$$|N| = mg\cos\alpha$$

iar din prima

$|\bar{\Phi}| = |\bar{F}| - mg\sin\alpha$

cu aceste două forțe mergem în inecuație și se obține

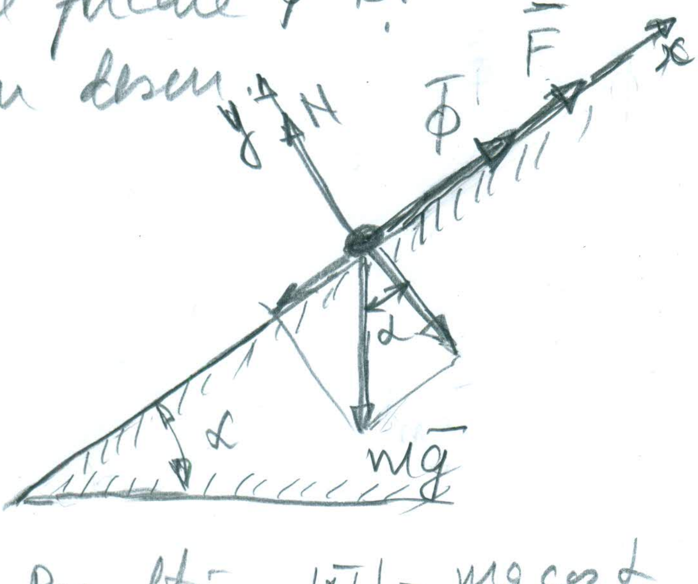
$$|\bar{F}| - mg\sin\alpha \leq \mu mg\cos\alpha$$

sau

$$|\bar{F}| \leq mg(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)$$

Ca punctul să nu urce pe plan, mărimea forței $\bar{F}$ nu trebuie să depășească valoarea $mg(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)$.

Să presupunem acum că, micșorând mărimea forței $\bar{F}$, punctul are tendința de a aluneca spre basa planului. Forța de frecare $\bar{\Phi}$ își va schimba sensul, ca în desen.



Ecuațiile scalare de echilibru capătă forma

$$|\bar{F}| + |\bar{\Phi}| - mg\sin\alpha = 0$$
$$|\bar{N}| - mg\cos\alpha = 0$$

Resultă $|\bar{N}| = mg\cos\alpha$

$$|\bar{\Phi}| = mg\sin\alpha - |\bar{F}|$$

Introducem forțele în inegalitate și se obține:

$$mg\sin\alpha - |F| \le \mu mg\cos\alpha$$

sau

$$|F| \geq mg(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)$$

Dacă $\sin\alpha - \mu\cos\alpha \le 0$ adică $tg\alpha \le \mu$, atunci inegalitatea este satisfăcută oricare ar fi mărimea forței $\vec{F}$, adică punctul nu pleacă spre baza planului nici dacă forța $\vec{F}$ este zero.

Intervalul în care poate lua valori mărimea forței $\vec{F}$ este

$$mg(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) \le |F| \le mg(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)$$

Observație. Rezultatul se poate obține folosind faptul că $|F| \le \mu |N|$ este echivalent cu

$$-\mu|N| \le F \le \mu|N|$$

care conduce la același rezultat lucrând numai cu una din situațiile de mai sus.