Seminarul 2

① Să se calculeze vectorul rezultant și vectorul moment rezultant în polul O al sistemului de forțe din desen.

vector rezultant = suma vectorilor

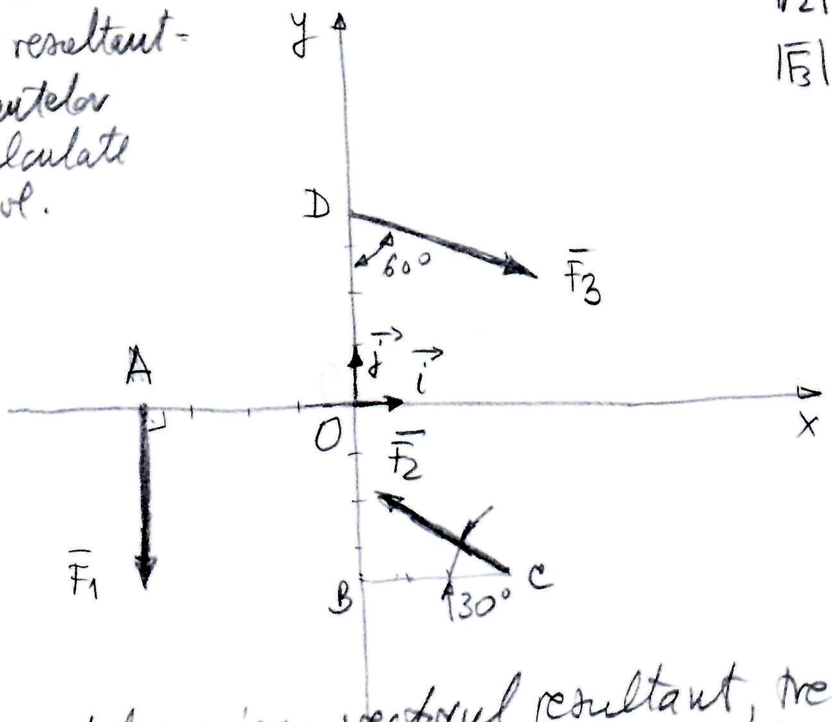
vector moment rezultant = suma momentelor vectorilor calculate în același pol.

$|\bar{F}_1| = 2N$ $OA = 4m$

$|\bar{F}_2| = 4N$ $OB = 2\sqrt{3}m$

$|\bar{F}_3| = 2N$ $BC = 3m$

$OD = 2\sqrt{3}m$



Pentru a determina vectorul rezultant, trebuie să se determine expresiile analitice ale vectorilor.

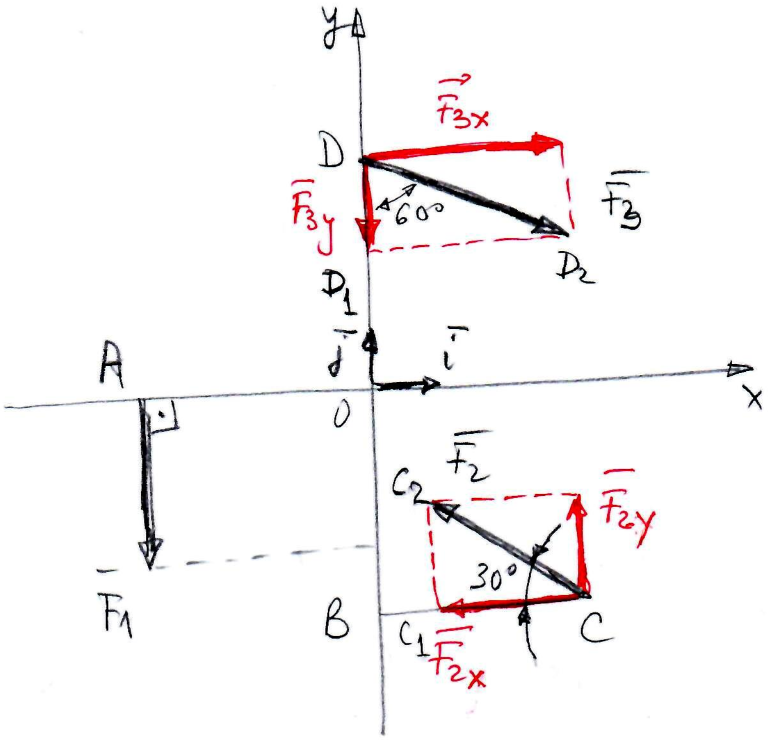
Forța $\bar{F}_1$ este paralelă cu axa Oy, deci nu are componentă după axa Ox. Proiecția ei pe axa Ox este un punct care nu are dimensiune. Prin urmare, forța $\bar{F}_1$ se proiectează în egală mărime pe axa Oy, sensul ei fiind opus sensului pozitiv al acestei axe, deci și sensului versorului $\vec{j}$ care va fi și versorul vectorului $\bar{F}_1$.

Orice vector trebuie să conțină în expresia sa semnul, modulul și versorul. În acest caz, vectorul $\bar{F}_1$ are expresia analitică

$$\bar{F}_1 = -2\vec{j}$$

semn modul versor.

Vectorul $\vec{F_2}$ trebuie descompus după direcțiile axelor Ox și Oy. Pentru aceasta, se construiește un dreptunghi care are ca diagonală pe $\bar{F_2}$ și laturile sunt paralele cu axele reperului.



Cele două componente $\bar{F_{2x}}$ și $\bar{F_{2y}}$ au originea în punctul C ca și vectorul $\bar{F_2}$. Se poate scrie, conform principiului paralelogramului, relația

$$\bar{F_2} = \bar{F_{2x}} + \bar{F_{2y}}.$$

Fiecare dintre componente se află în situația vectorului $\bar{F_1}$, adică este paralelă cu o axă de coordonate.

Componenta $\vec{F_{2x}}$ este paralelă cu axa Ox și are sens opus sensului pozitiv al acesteia, deci are sens opus și față de sensul versorului $\vec{i}$. Semnul componentei $\vec{F}_{2x}$ va fi, deci, minus. Versorul este versorul axei Ox, adică $\vec{i}$. Modulul se obține, de exemplu, din triunghiul dreptunghic CC_1C_2 în care $|\vec{F}_2|$ este ipotenuză iar $|\vec{F}_{2x}|$ este catetă alăturată. Prin urmare

$$|\vec{F}_{2x}| = |\vec{F}_2| \cos 30^\circ = 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}\,N \simeq 3{,}46\,N$$

Versorul componentei $\vec{F}_{2x}$ este versorul $\vec{i}$ al axei Ox cu care aceasta este paralelă. Expresia analitică a componentei $\vec{F}_{2x}$ este deci

$$\vec{F}_{2x} = -|\vec{F}_{2x}|\,\vec{i} = -2\sqrt{3}\,\vec{i} = -3{,}46\vec{i}$$

Componenta $\vec{F}_{2y}$ este paralelă cu axa Oy și are același sens cu sensul pozitiv al acesteia, deci are același sens cu versorul $\vec{j}$ al ei. Semnul componentei va fi plus. Modulul componentei $\vec{F}_{2y}$ se determină din triunghiul dreptunghic CC_1C_2 în care $|\vec{F}_2|$ este ipotenuză iar $|\vec{F}_{2y}|$ este catetă opusă fiind egală cu C_1C_2. Prin urmare rezultă

$$|\vec{F}_{2y}| = |\vec{F}_2| \cdot \sin 30^\circ = 4 \cdot \frac{1}{2} = 2N$$

Expresia analitică a componentei $\vec{F}_{2y}$ este

$$\vec{F}_{2y} = +2\,\vec{j}.$$

Vectorul $\vec{F_2}$ are expresia analitică

$$\vec{F_2} = \vec{F_{2x}} + \vec{F_{2y}} = -2\sqrt{3}\,\vec{i} + 2\vec{j} = -3{,}46\,\vec{i} + 2\vec{j}$$

Vectorul $\vec{F_3}$ trebuie descompus și el după direcțiile axelor Ox și Oy. Pentru aceasta se construiește un dreptunghi care are ca diagonală vectorul $\vec{F_3}$ și laturile paralele cu axele Ox și Oy, ca în desen. Componenta $\vec{F_{3x}}$ are versorul $\vec{i}$, sensul plus deoarece sensul lui $\vec{F_{3x}}$ coincide cu sensul lui $\vec{i}$ și modulul se calculează din triunghiul dreptunghic DD_1D_2 în care $|\vec{F_{3x}}|$ este egal cu D_1D_2 și este catetă opusă unghiului de $60°$, deci rezultă:

$$\vec{F_{3x}} = +|\vec{F_3}| \sin 60° \,\vec{i} = +2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{i} = \sqrt{3}\,\vec{i} = 1{,}73\,\vec{i}$$

Componenta $\vec{F_{3y}}$ are versorul $\vec{j}$, sensul minus deoarece sensul lui $\vec{F_{3y}}$ este opus sensului versorului $\vec{j}$ și modulul se calculează din triunghiul dreptunghic DD_1D_2 în care $|\vec{F_{3y}}|$ este egal cu DD_1 și este catetă alăturată unghiului de $60°$, deci rezultă

$$\vec{F_{3y}} = -|\vec{F_3}| \cos 60° \,\vec{j} = -2\,\frac{1}{2}\,\vec{j} = -\vec{j}$$

Vectorul $\vec{F_3}$ are expresia analitică

$$\overline{F_3} = \overline{F_{3x}} + \overline{F_{3y}} = \sqrt{3}\,\overline{i} - \overline{j} = 1{,}73\overline{i} - 1\overline{j}$$

Suma celor trei forțe se numește vector resultant și se recomandă a fi calculată folosind un tabel.

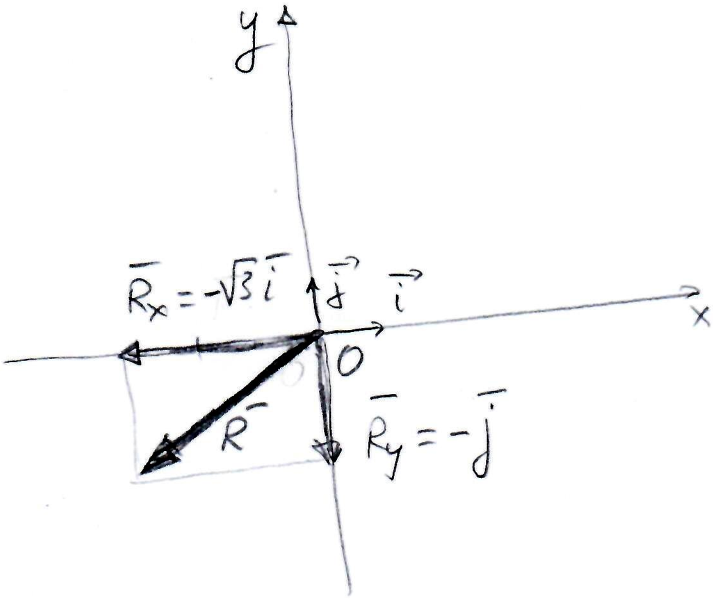
	$\overline{i}$	$\overline{j}$
$\overline{F_1}$	0	-2
$\overline{F_2}$	$-2\sqrt{3}$	+2
$\overline{F_3}$	$+\sqrt{3}$	-1
$\vec{R}$	$-\sqrt{3}$	-1

Vectorul resultant se notează cu $\vec{\mathcal{R}}$ (literă de mână)

Vectorul resultant este $\overline{\mathcal{R}} = R_x\overline{i} + R_y\overline{j} = -\sqrt{3}\,\vec{i} - \vec{j}$

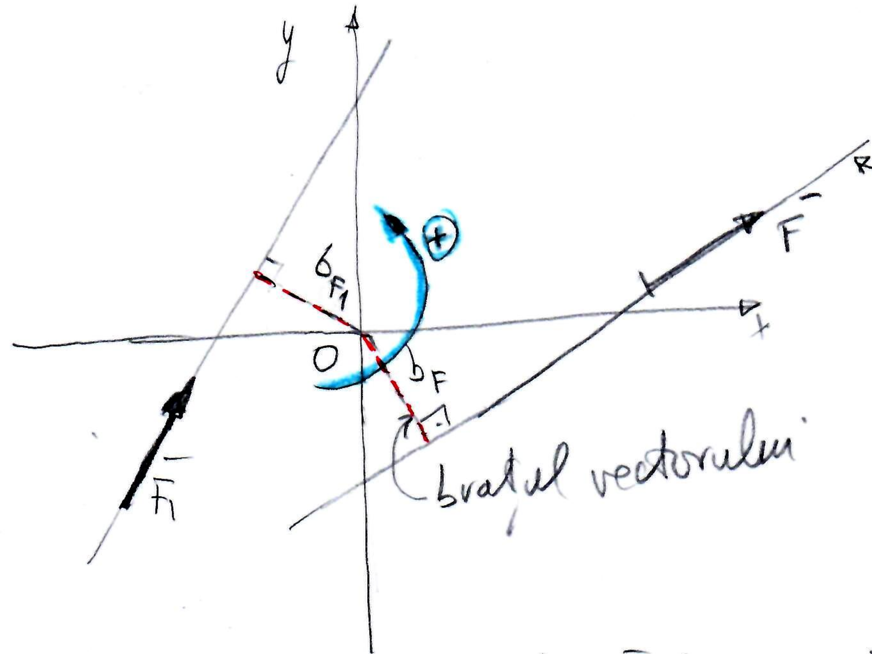
și are modulul $|\vec{\mathcal{R}}| = \sqrt{\vec{R}_x^{\,2} + \vec{R}_y^{\,2}} = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2\,N$

Reprezentarea grafică a acestui vector este arătată în desenul următor.



Vectorul moment resultant în polul O este suma momentelor vectorilor calculate în raport cu acelaşi pol O.

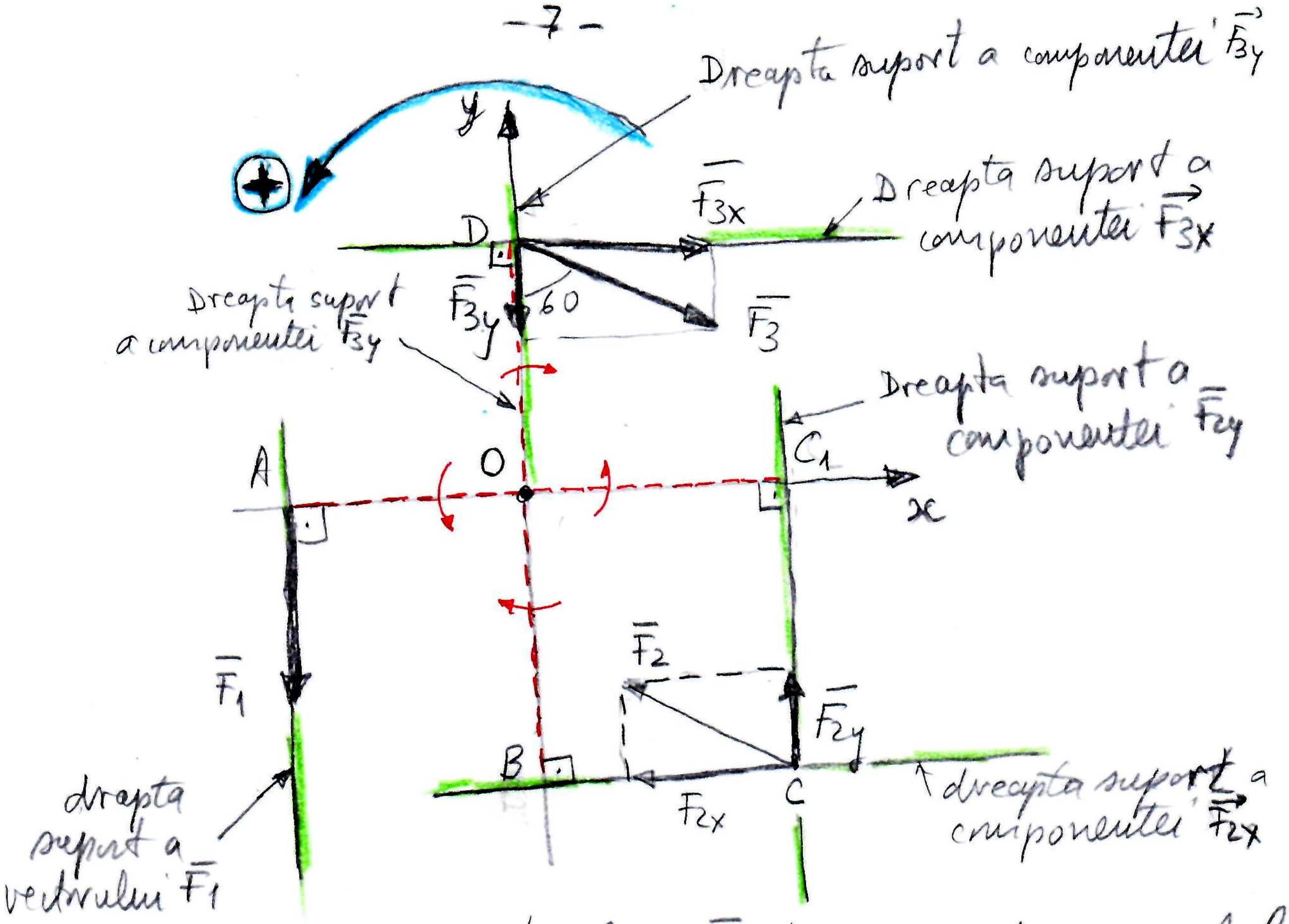
Momentul unui vector, în cazul plan, este un vector dirijat după axa Oz, deci are versorul $\bar{k}$, şi are modulul produsul dintre braţul vectorului şi modulul vectorului. Braţul vectorului este lungimea perpendicularei construită din polul O pe dreapta suport a vectorului. Semnul momentului se stabileşte cu regula observatorului: dacă vectorul tinde să-şi rotească braţul în jurul polului în sens trigonometric direct atunci semnul momentului este pozitiv.



$\bar{M}_o(\bar{F}) = +b_F \cdot |\bar{F}| \bar{k}$ [N·m]

$\bar{M}_o(\bar{F_1}) = -b_{F_1} |\bar{F_1}| \bar{k}$ [N·m]

Momentul unui vector $\bar{F}$ în raport cu un pol O se notează $\vec{M}_o(\vec{F})$ iar suma momentelor forţelor, adică vectorul moment rezultant se notează $\vec{\mathcal{M}}_o$, cu adică cu literă de mână.



(a). Momentul vectorului $\bar{F}_1$ în raport cu polul O.

Perpendiculara din O pe dreapta suport a vectorului $\bar{F}_1$ este OA. Vectorul $\bar{F}_1$ tinde să rotească brațul OA în sens pozitiv. Modulul vectorului moment a vectorului $\bar{F}_1$ calculat în raport cu polul O este $|OA|\cdot|\bar{F}_1|$. Rezultă că

$$\vec{M}_0(\bar{F}_1) = +|OA||\bar{F}_1|\cdot\bar{k}\ [N\cdot m] = 4\cdot 2\cdot\bar{k}\,[N\cdot m] = 8\bar{k}\ [N\cdot m]$$

(b.) Pentru calculul momentului vectorului $\bar{F}_2$ vom folosi proprietatea care spune că <u>momentul unui vector în raport cu un pol O este egal cu suma momentelor componentelor calculate în raport cu același pol O</u>. Rezultă formula

$$\overline{M}_0(\overline{F}_2) = \overline{M}_0(\overline{F}_{2x}) + \overline{M}_0(\overline{F}_{2y})$$

Momentele polare ale celor două componente se calculează similar cu calculul momentului polar al forței F_1, întrucât forțele sunt paralele cu axele.

Componenta $\overline{F}_{2x}$ are brațul OB care tinde să fie rotit în jurul punctului O în sens negativ, deci semnul momentului va fi minus. Momentul polar al componentei $\overline{F}_{2x}$ este deci:

$$\overline{M}_0(\overline{F}_{2x}) = -|OB|\cdot|\overline{F}_{2x}|\,\overline{k} = -2\sqrt{3}\cdot(2\sqrt{3})\,\overline{k} = -12\overline{k}\ [N\cdot m]$$

<u>Observație</u> În calculul momentului se folosește <u>modulul componentei</u> (număr fără semn) iar modulul se citește din tabelul folosit pentru calculul vectorului rezultant.

Componenta $\overline{F}_{2y}$ are brațul OC_1, care este perpendiculara din O pe dreapta suport a lui $\overline{F}_{2y}$. Deoarece figura $OBCC_1$ este un dreptunghi, $|OC_1| = |BC| = 3m$. Brațul OC_1 tinde să fie rotit în jurul punctului O în sens pozitiv, deci semnul momentului va fi plus. Momentul polar al componentei $\overline{F}_{2y}$ este

$$\overrightarrow{M}_0(\overline{F}_{2y}) = +|OC_1|\cdot|\overline{F}_{2y}|\,\overrightarrow{k} = +3\cdot 2\,\overline{k} = 6\overline{k}.\ [N\cdot m]$$

Momentul polar al vectorului $\overrightarrow{F}_2$ este

$$\bar{M}_0(\bar{F}_2) = \bar{M}_0(\bar{F}_{2x}) + \bar{M}_0(\vec{F}_{2y}) = -12\bar{k} + 6\bar{k} = -6\vec{k}\ [N\cdot m]$$

(c) Momentul polar al vectorului $\bar{F}_3$ este

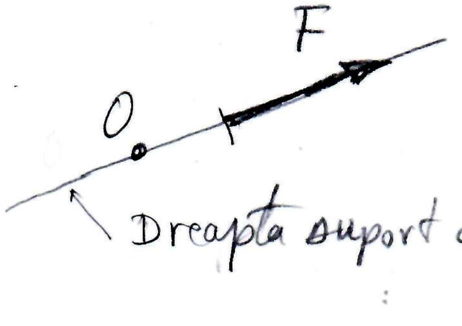
$$\bar{M}_0(\bar{F}_3) = \bar{M}_0(\bar{F}_{3x}) + \bar{M}_0(\bar{F}_{3y}) =$$

Componenta $\bar{F}_{3x}$ este perpendiculară pe axa Oy, iar perpendiculara din O pe dreapta suport este OD, care este și brațul lui $\bar{F}_{3x}$. Forța $\bar{F}_{3x}$ tinde să rotească brațul OD în jurul lui O în sens negativ, deci semnul momentului va fi minus. Momentul polar al componentei $\bar{F}_{3x}$ este

$$\bar{M}_0(F_{3x}) = -|OD|\,|\bar{F}_{3x}|\cdot\bar{k} = -2\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}\,\bar{k} = -6\vec{k}\ [N\cdot m]$$

Componenta $\bar{F}_{3y}$ are o particularitate și anume faptul că dreapta sa suport, care este chiar axa Oy, trece prin polul O. Aceasta înseamnă că perpendiculara din O pe dreapta suport are lungime zero, adică nu există. În consecință, momentul polar al componentei $\bar{F}_{3y}$ este zero.

<u>Observație</u> Dacă dreapta suport a unui vector trece prin pol, atunci momentul polar este nul.



$$\bar{M}_0(\bar{F}) = 0.$$

Momentul polar al forței $\bar{F_3}$ este deci

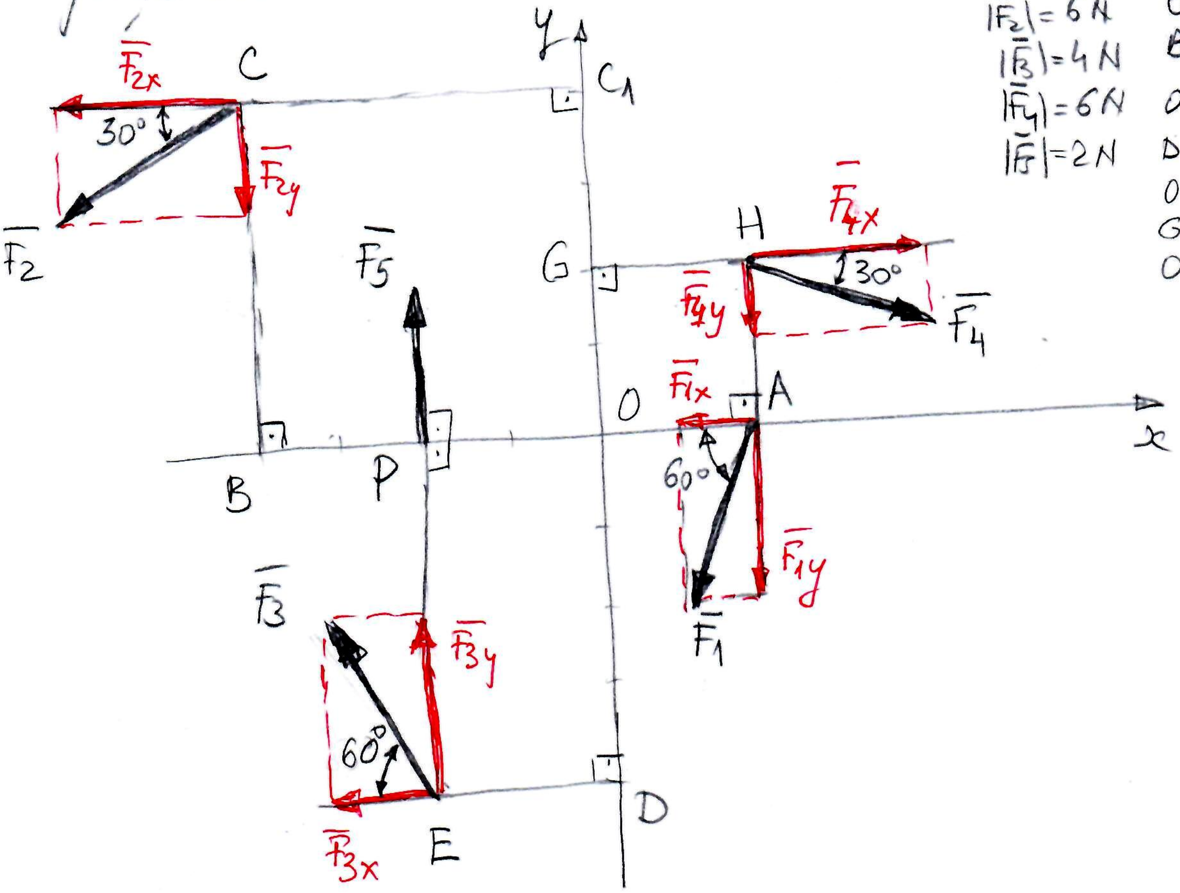
$$\bar{M_0}(\bar{F_3}) = \bar{M_0}(\bar{F_{3x}}) + \bar{M_0}(\bar{F_{3y}}) = -6\bar{k}\ N\cdot m.$$

Vectorul moment resultant în polul O al sistemului de forțe se notează $\bar{M_0}$ și se calculează astfel

$$\vec{M_0} = \vec{M_0}(\vec{F_1}) + \vec{M_0}(\vec{F_2}) + \vec{M_0}(\vec{F_3}) = 8\bar{k} - 6\bar{k} - 6\bar{k} = -4\bar{k}\,[N\cdot m].$$

② Să se calculeze vectorul rezultant și vectorul moment rezultant în polul O al sistemului de forțe din desen.

$|\bar{F_1}| = 4N$ $OA = 2m$
$|\bar{F_2}| = 6N$ $OB = 4m$
$|\bar{F_3}| = 4N$ $BC = \frac{14}{3}m$
$|\bar{F_4}| = 6N$ $OD = 4m$
$|\bar{F_5}| = 2N$ $DE = 2m$
$OG = 2m$
$GH = 2m$
$OP = 2m$



Vectorul $\vec{F_1}$ se descompune și are expresia analitică

$$\bar{F_1} = \bar{F_{1x}} + \bar{F_{1y}} = -|\bar{F_1}|\cos 60°\,\vec{i} - |\bar{F_1}|\sin 60°\,\vec{j} = -4\cdot\frac{1}{2}\vec{i} - 4\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{j} =$$
$$= -2\vec{i} - 2\sqrt{3}\vec{j}.$$

Vectorul $\bar{F}_2$ are expresia analitică:

$$\bar{F}_2 = \vec{F}_{2x} + \vec{F}_{2y} = -|\bar{F}_2|\cos 30^\circ \bar{i} - |\bar{F}_2|\sin 30 \bar{j} = -6\frac{\sqrt{3}}{2} i - 6 \cdot \frac{1}{2} j =$$

$$= -3\sqrt{3}\bar{i} - 3\bar{j}$$

Vectorul $\bar{F}_3$ are expresia analitică:

$$\bar{F}_3 = \vec{F}_{3x} + \bar{F}_{3y} = -|\bar{F}_3|\cos 60^\circ \bar{i} + |\bar{F}_3|\sin 60^\circ \bar{j} = -4\frac{1}{2}\bar{i} + 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\bar{j} =$$

$$= -2\bar{i} + 2\sqrt{3}\bar{j}$$

Vectorul $\bar{F}_4$ are expresia analitică:

$$\bar{F}_4 = \bar{F}_{4x} + \bar{F}_{4y} = +|\bar{F}_4|\cos 30^\circ \bar{i} - |\bar{F}_4|\sin 30^\circ \bar{j} = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\bar{i} - 6\frac{1}{2}\bar{j} =$$

$$= 3\sqrt{3}\bar{i} - 3\bar{j}$$

Vectorul $\bar{F}_5$ are expresia analitică:

$$\bar{F}_5 = 2\bar{j}$$

Pentru calculul vectorului rezultant se folosește următorul tabel.

	$\bar{i}$	$\bar{j}$
$\bar{F}_1$	-2	$-2\sqrt{3}$
$\bar{F}_2$	$-3\sqrt{3}$	-3
$\bar{F}_3$	-2	$2\sqrt{3}$
$\bar{F}_4$	$3\sqrt{3}$	-3
$\bar{F}_5$	0	2
$\bar{R}$	-4	-4

Vectorul rezultant este

$$\bar{R} = -4\bar{i} - 4\bar{j}$$

Momentele vectorilor în raport cu polul O sunt:

$$\overline{M}_0(\overline{F_1}) = \overline{M}_0(\overline{F_{1x}}) + \overline{M}_0(\overline{F_{1y}}) = 0 - |OA||\overline{F_{1y}}|\overline{k} = -2\cdot 2\sqrt{3}\,\overline{k} = -4\sqrt{3}\,\overline{k}$$

$$\overline{M}_0(\overrightarrow{F_2}) = \overline{M}_0(\overline{F_{2x}}) + \overline{M}_0(\overline{F_{2y}}) = +|OC_1||\overline{F_{2x}}|\overline{k} + |OB||\overline{F_{2y}}|\overline{k} =$$

$$= +\frac{14}{3}\cdot 3\sqrt{3}\,\overline{k} + 4\cdot 3\,\overline{k} = (14\sqrt{3}+12)\overline{k}$$

$$\overline{M}_0(\overline{F_3}) = \overline{M}_0(\overline{F_{3x}}) + \overrightarrow{M}_0(\overline{F_{3y}}) = -|OD||\overline{F_{3x}}|\overline{k} - |OP||\overline{F_{3y}}|\overline{k} =$$

$$= -4\cdot 2\overline{k} - 2\cdot 2\sqrt{3}\,\overline{k} = (-8-4\sqrt{3})\overline{k}$$

$$\overline{M}_0(\overline{F_4}) = \overline{M}_0(\overline{F_{4x}}) + \overline{M}_0(\overline{F_{4y}}) = -|OG||\overline{F_{4x}}|\overline{k} - |\overline{OA}||\overline{F_{4y}}|\overline{k} =$$

$$= -2\cdot 3\sqrt{3}\,\overline{k} - 2\cdot 3\,\overline{k} = (-6\sqrt{3}-6)\overline{k}$$

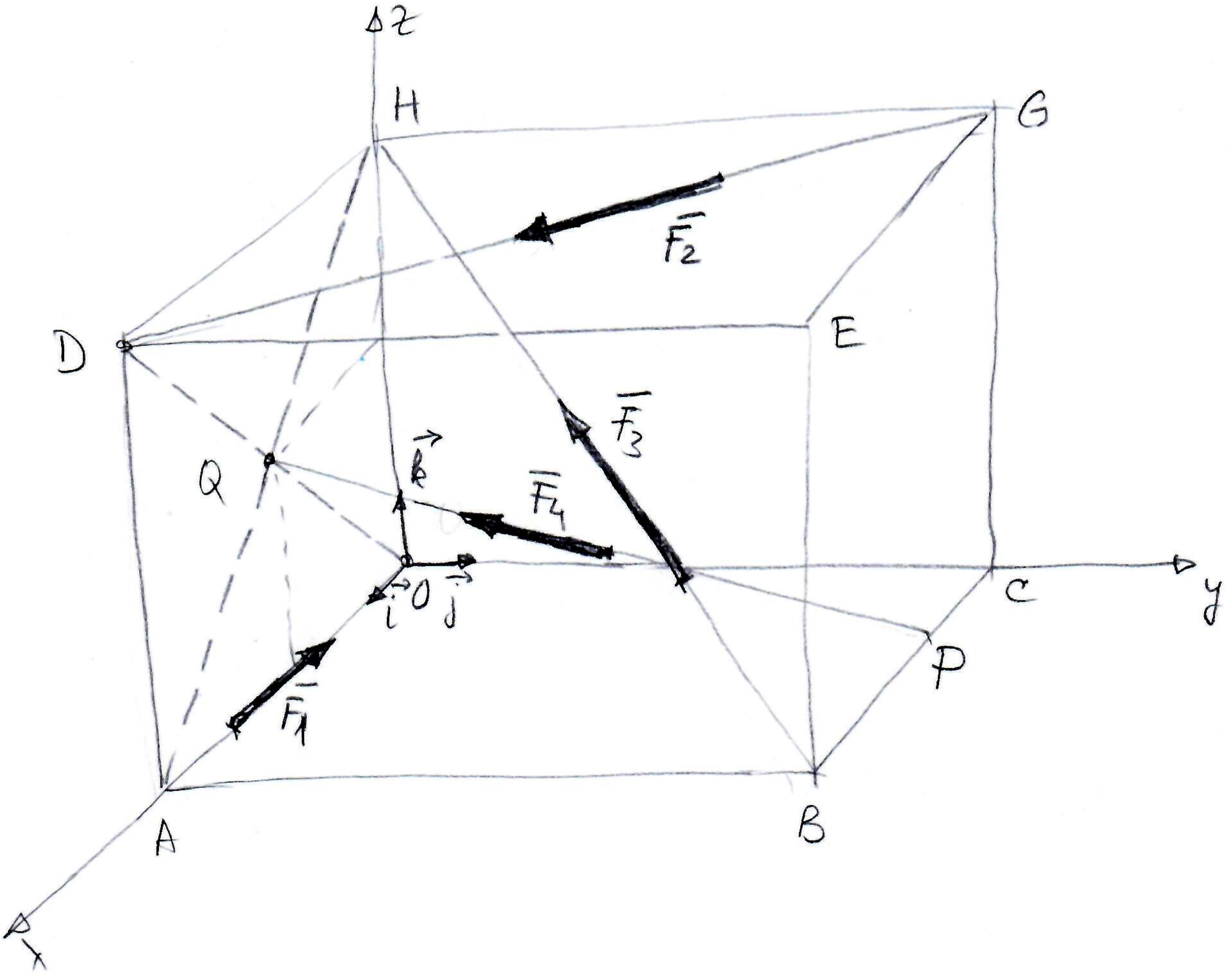
$$M_0(\overline{F_5}) = -|OP||\overline{F_5}|\overline{k} = -2\cdot 2\overline{k} = -4\overline{k}$$

Vectorul moment rezultant în polul O este

$$\overrightarrow{M}_0 = \overrightarrow{M}_0(\overrightarrow{F_1}) + \overrightarrow{M}_0(\overrightarrow{F_2}) + \overrightarrow{M}_0(\overrightarrow{F_3}) + \overrightarrow{M}_0(\overrightarrow{F_4}) + \overrightarrow{M}_0(\overrightarrow{F_5}) =$$

$$= (-4\sqrt{3}+14\sqrt{3}+12-8-4\sqrt{3}-6\sqrt{3}-6-4)\overline{k} = -6\overline{k}$$

③ Se consideră un sistem de forțe în spațiu care acționează asupra unui paralelipiped așa cum se arată în desen. Să se calculeze vectorul rezultant și vectorul moment rezultant în polul O.



$|\overline{F_1}| = 4\,N$ $\quad$ $OA = 3\,m$

$|\overline{F_2}| = 10\,N$ $\quad$ $OC = 4\,m$

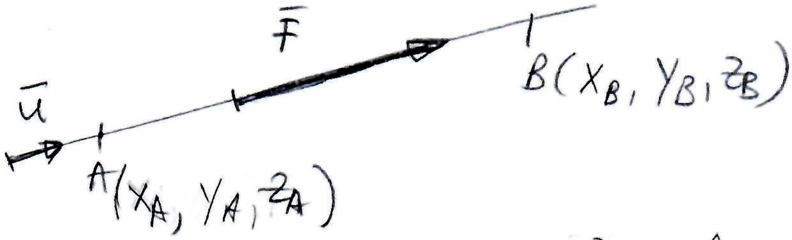
$|\overline{F_3}| = \sqrt{41}\,N$ $\quad$ $OH = 4\,m$

$|\overline{F_4}| = 9\,N$ $\quad$ $CP = \dfrac{BC}{3}$

Punctul Q se află la intersecția diagonalelor dreptunghiului OADH. Forța $\overline{F_4}$ este dirijată de la P la Q.

Pentru a determina expresia analitică a unui vector în spațiu, se folosește metoda versorului, care este prezentată în continuare.

Se consideră un vector $\bar{F}$ situat pe o dreaptă (Δ) și două puncte A și B de o parte și de alta a vectorului, ca în desen. Se cunosc modulul vectorului $\bar{F}$ și coordonatele punctelor A și B.



Se construiește vectorul $\bar{AB}$ coliniar și de același sens cu vectorul $\vec{F}$. Versorul $\bar{u}$ al vectorului $\bar{F}$ este $\vec{u} = \frac{\vec{F}}{|\vec{F}|}$ care este și versorul vectorului $\bar{AB}$, adică $\bar{u} = \frac{\vec{AB}}{|\vec{AB}|}$. Din prima relație, se obține

$$\vec{F} = |\vec{F}| \cdot \vec{u}$$

care, folosind a doua relație, conduce la:

$$\vec{F} = |\vec{F}| \cdot \frac{\vec{AB}}{|\vec{AB}|}$$

sau încă

$$\boxed{\vec{F} = |\vec{F}| \frac{(x_B - x_A)\vec{i} + (y_B - y_A)\vec{j} + (z_B - z_A)\vec{k}}{\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}}}$$

Pentru vectorul $\bar{F}_1$ punctele A și B din formula de mai sus sunt A și O. Coordonatele lor sunt:

$A(3,0,0)$ și $O(0,0,0)$. Rezultă expresia analitică a vectorului $\bar{F}_1$

$$\bar{F}_1 = 4\,\frac{\overset{x_O - x_A}{(0-3)}\bar{i} + \overset{y_O - y_A}{(0-0)}\bar{j} + \overset{z_O - z_A}{(0-0)}\bar{k}}{\sqrt{(0-3)^2+0^2+0^2}} = 4\cdot\frac{-3\bar{i}}{3} = -4\bar{i}$$

<u>Observație</u>. Pentru vectorul $\bar{F}_1$ nu este necesar să folosim formula de calcul a expresiei analitice deoarece $\bar{F}_1$ este coliniar cu axa Ox și de sens opus versorului $\bar{i}$. Componentele lui $\bar{F}_1$ după axele Oy și Oz sunt nule. Prin urmare rezultă direct: $\bar{F}_1 = -4\bar{i}$.

Vectorul $\bar{F}_2$ este orientat de la punctul G la punctul D. Coordonatele lor sunt:

$G(0,4,4)$ și $D(3,0,4)$.

Expresia analitică a lui $\bar{F}_2$ este:

$$\bar{F}_2 = 10\,\frac{(3-0)\bar{i}+(0-4)\vec{j}+(4-4)\bar{k}}{\sqrt{3^2+(-4)^2+0^2}} = \overset{2}{\cancel{10}}\,\frac{3\vec{i}-4\vec{j}}{\cancel{5}} = 6\bar{i}-8\vec{j}$$

Vectorul $\bar{F}_3$ este orientat de la punctul B către punctul H. Coordonatele lor sunt:

$B(3,4,0)$ și $H(0,0,4)$.

Expresia analitică a vectorului $\vec{F}_3$ este:

$$\bar{F}_3 = \sqrt{41}\,\frac{(0-3)\bar{i}+(0-4)\bar{j}+(4-0)\bar{k}}{\sqrt{(-3)^2+(-4)^2+4^2}} = \sqrt{41}\,\frac{-3\bar{i}-4\bar{j}+4\bar{k}}{\sqrt{9+16+16}} =$$

$$= \sqrt{41}\,\frac{-3\bar{i}-4\bar{j}+4\bar{k}}{\sqrt{41}} = -3\bar{i}-4\bar{j}+4\bar{k}.$$

Vectorul $\bar{F}_4$ este orientat de la punctul P la punctul Q, care au coordonatele

$P(1,4,0)$ și $Q(\frac{3}{2}, 0, 2)$.

Expresia analitică a vectorului F_4 este:

$$\bar{F}_4 = 9\,\frac{(\frac{3}{2}-1)\bar{i}+(0-4)\bar{j}+(2-0)\bar{k}}{\sqrt{(\frac{1}{2})^2+(-4)^2+(2)^2}} = 9\,\frac{\frac{1}{2}\bar{i}-4\bar{j}+2\bar{k}}{\sqrt{\frac{1}{4}+16+4}} =$$

$$= 9\,\frac{\frac{1}{2}\bar{i}-4\bar{j}+2\bar{k}}{\sqrt{\frac{81}{4}}} = \cancel{9}\,\frac{\frac{1}{2}\vec{i}-4\vec{j}+2\vec{k}}{\frac{\cancel{9}}{2}} = 2\left(\frac{1}{2}\vec{i}-4\vec{j}+2\vec{k}\right)$$

$$= \bar{i}-8\bar{j}+4\bar{k}$$

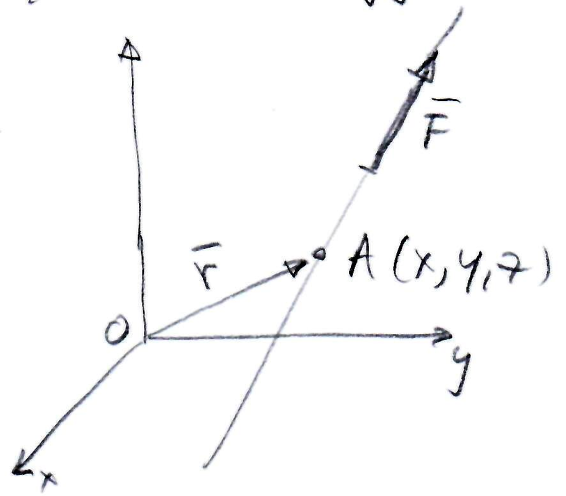
Vectorul resultant $\vec{R}$ se calculează folosind tabelul următor

	$\bar{i}$	$\bar{j}$	$\bar{k}$
$\bar{F}_1$	-4	0	0
$\bar{F}_2$	6	-8	0
$\bar{F}_3$	-3	-4	+4
F_4	1	-8	4
$\vec{R}$	0	-20	8

$$\Rightarrow \vec{R} = -20\vec{j}+8\vec{k}$$

$$|\vec{R}| = \sqrt{20^2+8^2} = 4\sqrt{29} = 21,54\,N$$

Vectorul moment în polul O al unui vector alunecător $\bar{F} = F_x\bar{i} + F_y\bar{j} + F_z\bar{k}$ este dat de produsul vectorial dintre vectorul de poziție al unui punct <u>oarecare</u> de pe suport având vectorul de poziție $\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$ și vectorul $\bar{F}$.



$$\bar{M}_0(\bar{F}) = \bar{r} \times \bar{F} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} =$$

$$= (yF_z - zF_y)\vec{i} - (xF_z - zF_x)\vec{j} + (xF_y - yF_x)\vec{k}$$

Deoarece punctul ales de pe suportul vectorului este oarecare, atunci pentru calculul momentelor forțelor din problemă se alege unul dintre cele două puncte de pe suport, de regulă acela care conține mai multe coordonate nule (zero).

Deoarece vectorul $\overline{F_1}$ se află pe axa Ox care conține originea $O(0,0,0)$, înseamnă că momentul polar al vectorului $\vec{F_1}$ este nul ($\vec{r_0} = \vec{0}$ deci $\vec{r_0} \times \vec{F_1} = 0$)

Observație Momentul polar al unui vector a cărui dreaptă suport trece prin originea sistemului de vectori (prin pol), este nul.

Pentru calculul momentului polar al vectorului $\overline{F_2}$ se alege punctul G dar, la fel de bine, poate fi ales punctul D.

$$\overline{M}_0(\overline{F_2}) = \overline{r}_G \times \overline{F_2} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 0 & 4 & 4 \\ 6 & -8 & 0 \end{vmatrix} = 32\overline{i} + 24\overline{j} - 24\overline{k}$$

Pentru calculul momentului polar al vectorului $\overline{F_3}$ se alege punctul H deoarece are două coordonate nule.

$$\overline{M}_0(\overline{F_3}) = \overline{r}_H \times \overline{F_3} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 0 & 0 & 4 \\ -3 & -4 & 4 \end{vmatrix} = 16\overline{i} - 12\overline{j}$$

Observație Dacă dreapta suport a unui vector este paralelă cu o axă de coordonate sau intersectează o axă de coordonate, atunci componenta momentului polar după acea axă este nulă. În cazul nostru, dreapta suport a vectorului $\overline{F_3}$ intersectează axa Oz și momentul polar a lui $\overline{F_3}$ nu are componentă după direcția Oz.

Pentru calculul momentului lui $\overrightarrow{F_4}$ se alege punctul P deoarece punctul Q are o coordonată de tip fracție și ar face calculele mai greoaie.

$$\overline{M}_0(\overline{F_4}) = \overline{r}_P \times \overline{F_4} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 1 & 4 & 0 \\ 1 & -8 & 4 \end{vmatrix} = 16\overline{i} - 4\overline{j} - 12\overline{k}$$

Vectorul moment rezultant în polul O, $\overrightarrow{M_0}$, se calculează folosind tabelul următor

	$\overline{i}$	$\overline{j}$	$\overline{k}$
$\overline{M}_0(\overline{F_1})$	0	0	0
$\overline{M}_0(\overline{F_2})$	32	24	-24
$\overline{M}_0(\overline{F_3})$	16	-12	0
$\overline{M}_0(\overline{F_4})$	16	-4	-12
$\overrightarrow{M_0}$	64	8	-36

$\Rightarrow \overline{M_0} = 64\overline{i} + 8\overline{j} - 36\overline{k}$.

$|\overline{M_0}| = \sqrt{64^2 + 8^2 + 36^2} = 73,86\ N\cdot m$

Observație. Întotdeauna vectorul moment polar este perpendicular pe vectorul al cărui moment este, deoarece vectorul produs vectorial este perpendicular pe fiecare dintre vectorii produsului.

$$\overline{M}_0(\overline{F}) = \overline{r} \times \overline{F} \Rightarrow \overline{M}_0(\overline{F}) \perp \overline{r} \text{ și } \overline{M}_0(\overline{F}) \perp \overline{F}$$

Vectorul moment resultant în polul O, $\vec{M}_0$, nu este, de regulă, perpendicular pe vectorul resultant $\vec{R}$. Dacă vectorii sunt perpendiculari atunci produsul scalar al lor este nul. În cazul nostru

$$\vec{R} \cdot \overline{M}_0 = (-20\overline{j} + 8\overline{k})(64\overline{i} + 8\overline{j} - 36\overline{k}) =$$

$$= -160 - 288 = -448 \neq 0$$

deci $\vec{R}$ și $\vec{M}_0$ nu sunt perpendiculari.

Produsul scalar al vectorilor $\overline{a} = a_x\overline{i} + a_y\overline{j} + a_z\overline{k}$ și $\overline{b} = b_x\overline{i} + b_y\overline{j} + b_z\overline{k}$ este

$$\overline{a} \cdot \overline{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

și, evident este un scalar și nu un vector.

$$\overline{a} \cdot \overline{b} = |a| \cdot |b| \cos(\overline{a}, \overline{b})$$ dacă $\overline{a} \perp \overline{b}$ atunci $\cos(\overline{a}, \overline{b}) = 0$ și reciproc.