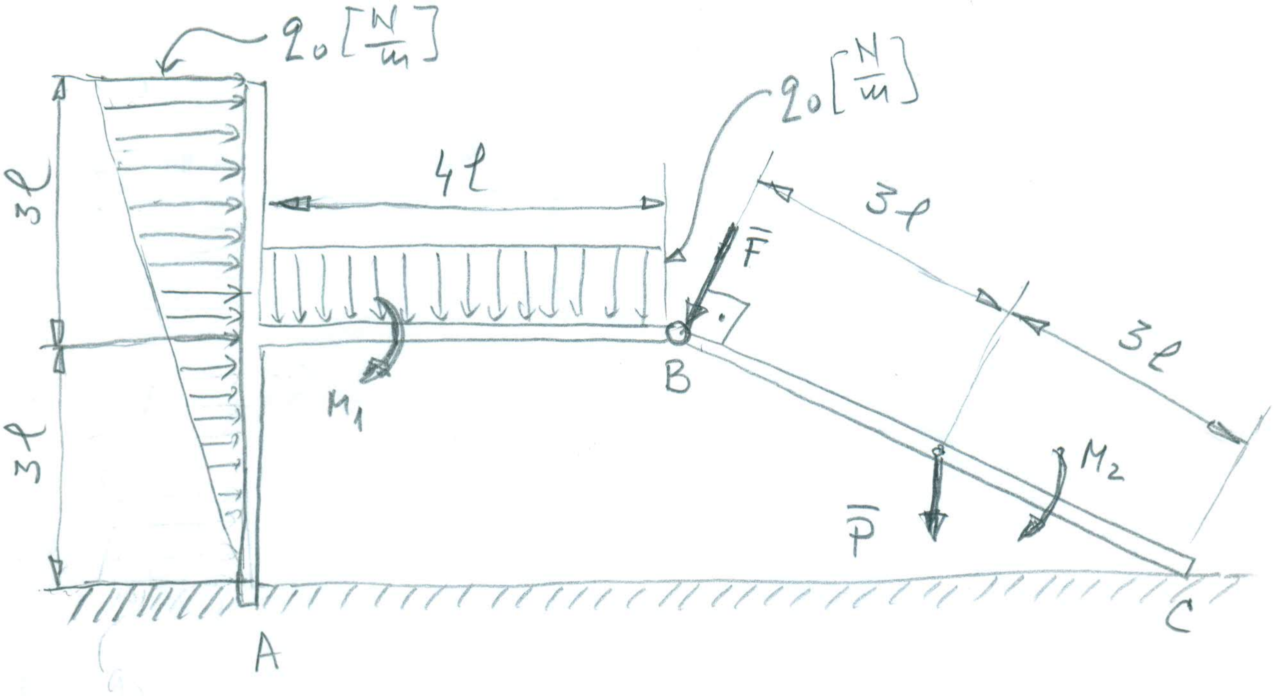
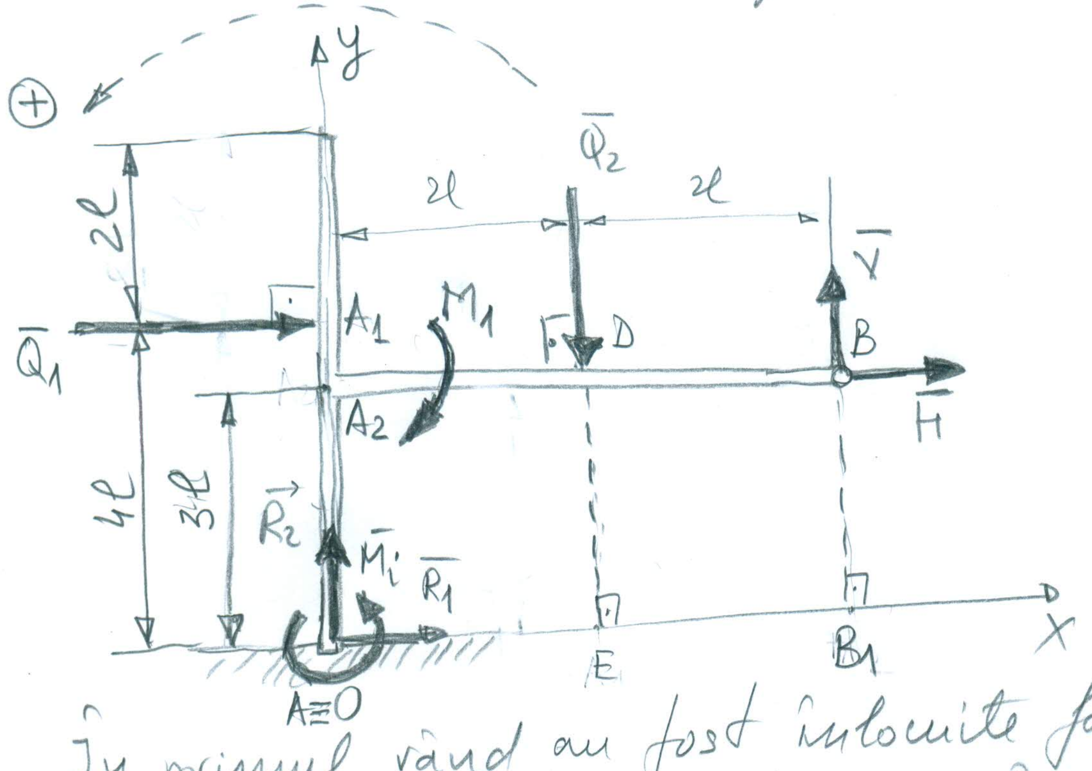
Seminarul 9

(1) Cunoscând că sistemul din desen este în echilibru, să se scrie ecuațiile scalare de echilibru folosind metoda izolării corpurilor.



Sistemul este format din două corpuri: Un corp este o bară de forma literei T așezată răsturnat iar cel de al doilea ~~este~~ o bară rectilinie. Primul corp este încastrat în punctul A iar în punctul B este articulat cel de al doilea. Al doilea corp este, evident, articulat de primul în punctul B și se reazemă pe sol în punctul C. Numărul solicitărilor necunoscute este egal cu reacțiunile din legături. Avem astfel două forțe și un moment în încastrare, două forțe în articulație și o forță în reazem. Prin urmare sunt 6 necunoscute. Pentru fiecare corp se pot scrie trei ecuații de echilibru deci se pot scrie pentru cele două corpuri șase ecuații de echilibru. Deoarece numărul de ecuații este egal cu numărul de necunoscute, sistemul este static determinat.

Diagrama de corp liber pentru primul corp este reprezentată în figura de mai jos.



În primul rând au fost înlocuite forțele distribuite continuu și perpendicular pe un segment de dreaptă cu rezultanta lor. Forța cu distribuție triunghiulară are rezultanta $\overline{Q}_1$ care trece prin centrul de masă al triunghiului dreptunghic ce are catetele $6l$ și q_0 și are modulul egal cu aria acestui triunghi

$$|\overline{Q_1}| = \frac{q_0 \cdot 6l}{2} = q_0 \cdot 3l \ [N]$$

unde $q_0 \left[\frac{N}{m}\right]$ este mărimea maximă a sarcinii distribuite.

Forța distribuită dreptunghiular are mărimea constantă $q_0 \left[\frac{N}{m}\right]$ iar rezultanta $\overrightarrow{Q_2}$ trece prin centrul de masă al dreptunghiului ce are laturile q_0 și $4l$, iar modulul este egal cu aria dreptunghiului, adică

$$|\overline{Q_2}| = q_0 \cdot 4l \ [N].$$

Se înlocuiește apoi încastrarea din punctul A cu forțele reciproc perpendiculare $\overrightarrow{R_1}$ și $\overrightarrow{R_2}$ având direcțiile orizontală și respectiv verticală după cum sunt și direcțiile forțelor $\overline{Q_1}$ și $\overline{Q_2}$ precum și cu un moment în încastrare $\overline{M_i}$. Sensurile forțelor și ale momentului sunt alese arbitrar. Dacă după rezolvarea sistemului de ecuații de echilibru semnul lor rezultă negativ, aceasta înseamnă că sensul lor real ~~este~~ opus celui presupus inițial.

se înlocuieşte articulaţia cu forţele reciproc perpendiculare $\vec{H}$ şi $\vec{V}$ pentru care s-au ales direcţiile orizontală şi verticală iar sensurile lor sunt alese arbitrar.

Reperul xOy se alege cu polul într-un punct în care se intersectează cât mai multe forţe deoarece momentele acestora în raport cu polul O vor fi zero şi ecuaţia de momente va fi mai simplă. Atât în punctul A cât şi în punctul B sunt aplicate două forţe dar este preferat ca pol O punctul A deoarece corpul este astfel în primul cadran ceea ce este de preferat.

Forţa $\bar{F}$ perpendiculară pe bara BC şi aplicată direct în articulaţia din punctul B SE DESENEAZĂ NUMAI LA UNUL DINTRE CORPURI indiferent la care. Deoarece bara BC este mai puţin solicitată, adică asupra ei acţionează mai puţine forţe, se preferă ca forţa $\bar{F}$ să se desenese ca acţionând asupra ei.

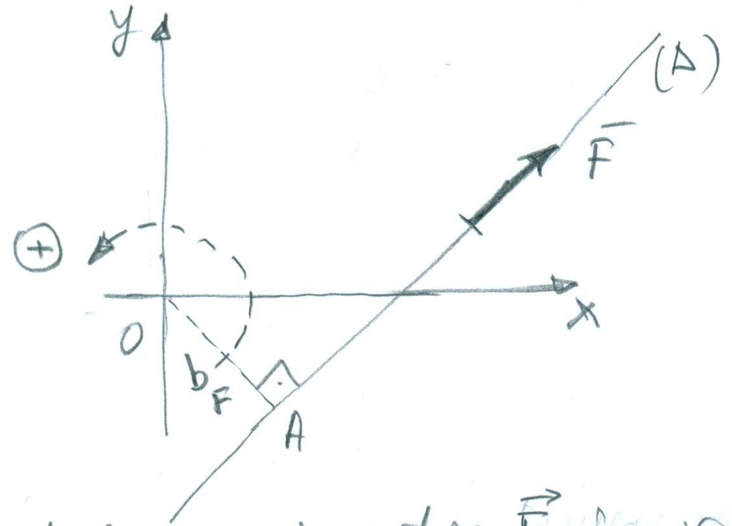
Ecuaţiile scalare de echilibru pentru primul corp sunt:

$Ox: R_1 + Q_1 + H = 0$

$Oy: R_2 - Q_2 + V = 0$

$M_0: M_i - Q_1 \cdot 4l - M_1 - Q_2 \cdot 2l + V \cdot 4l - H \cdot 3l = 0$

Pentru calculul momentelor se aplică metoda cu brațul ilustrată mai jos.



Momentul unui vector $\vec{F}$ în raport cu un pol (punct) O, în cazul plan, se calculează cu formula:

$$\overline{M}_0(\overline{F}) = \pm\, b_F \cdot |\overline{F}|\, \overline{k}$$

unde:

b_F este brațul vectorului $\overline{F}$ egal cu lungimea perpendicularei coborâtă din polul O pe dreapta suport notată (Δ) a vectorului $\vec{F}$.

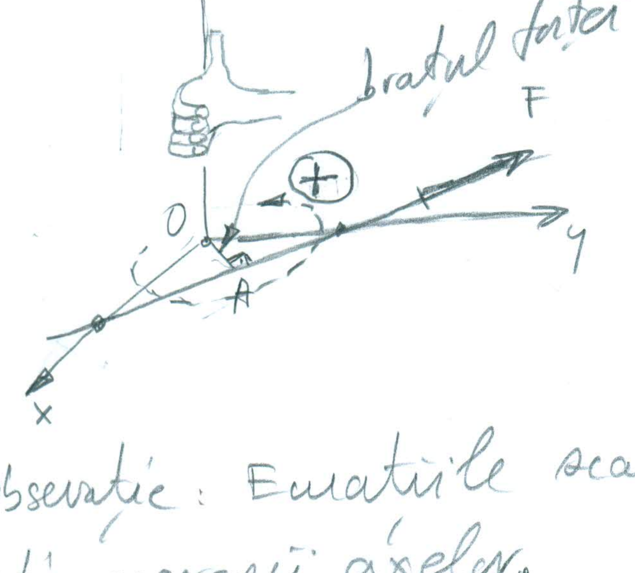
$|\overline{F}|$ este modulul forței

$\overline{k}$ este versorul axei Oz.

semnul momentului se stabilește cu regula observatorului:

Dacă, atunci când privim dinspre sensul pozitiv al axei Oz, forța tinde să rotească brațul ei în jurul polului O în sens trigonometric direct, atunci semnul momentului este pozitiv (vezi desenul de mai sus).

O altă regulă este regula mâinii drepte: Dacă, atunci când degetul mare al mâinii drepte este orientat în sensul pozitiv al axei Oz, atunci degetele palmei vor indica sensul pozitiv al momentului



Observație: Ecuațiile scalare de echilibru nu conțin versorii axelor.

Sensul pozitiv al momentelor este arătat pe desen cu un arc de cerc desenat cu linie întreruptă.

Momentul M_i din încastrare are semnul plus.

Forțele $\bar{R}_1$ și $\bar{R}_2$ din încastrare au momentele zero fiind aplicate în polul O.

Forța $\bar{Q}_1$ are brațul OA_1 și semnul momentului ei este minus.

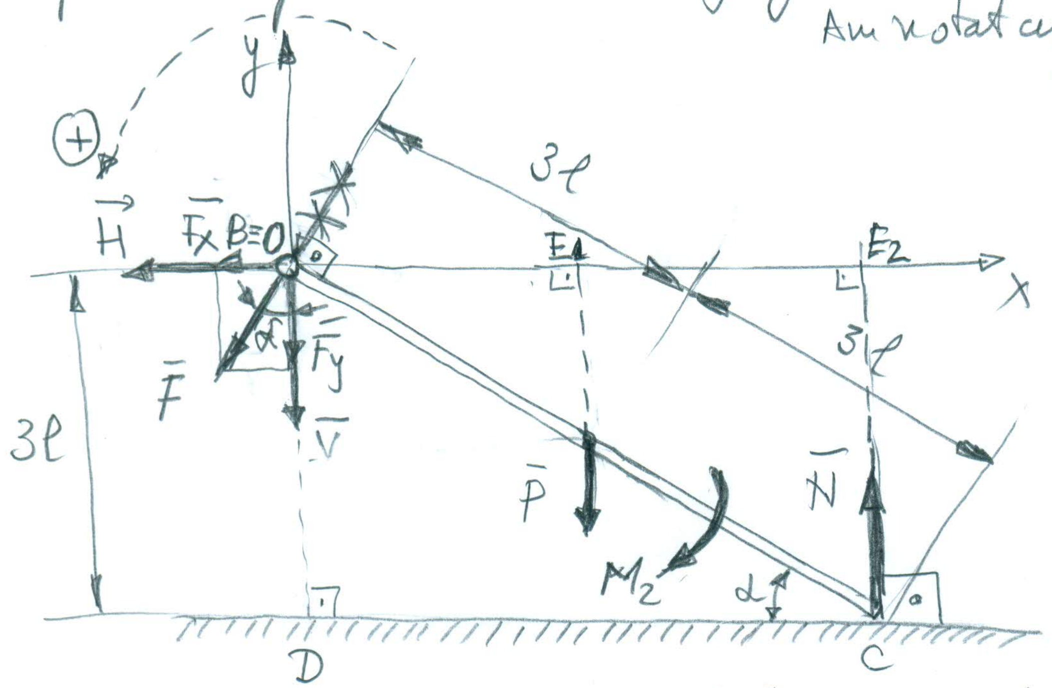
Momentul concentrat M_1 are semnul minus.

Forța Q_2 are brațul OE (brațul se măsoară întotdeauna din pol). Semnul momentului este minus. Segmentul OE este egal cu segmentul A_2D deci are lungimea $2l$.

Forța V are brațul OB_1. Semnul momentului forței V este plus. Lungimea brațului OB_1 este egală cu lungimea segmentului A_2B deci este $4l$.

Forța H are brațul OA_2. Semnul momentului forței H este minus. Lungimea brațului OA_2 este $3l$.

Diagrama de corp liber a celui de al doilea corp este reprezentată în figura de mai jos. Am notat cu α unghiul $\widehat{OCD}$.



Forța $\bar{F}$ aplicată direct în articulație este translată astfel încât originea să fie în punctul B care coincide cu originea O a reperului xOy. Unghiul α este între forța F și componenta $\bar{F_y}$ deoarece $F_y \perp DC$ iar $F \perp OC$.

Pe de altă parte, din triunghiul dreptunghic ODC, rezultă că

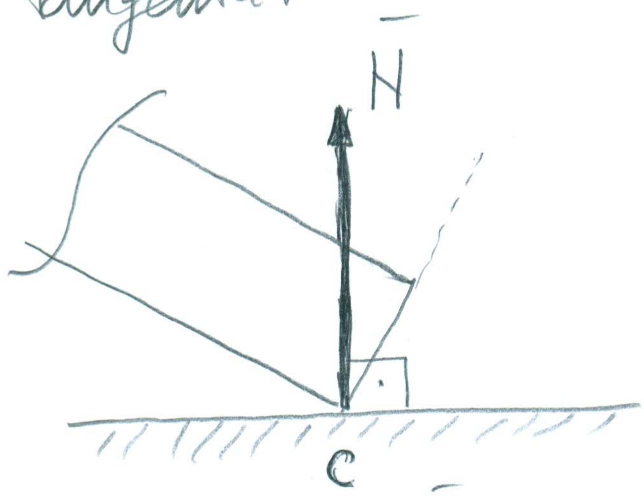
$$\sin\alpha = \frac{OD}{OC} = \frac{3l}{6l} = \frac{1}{2}$$

adică $\alpha = \frac{\pi}{6}$ sau $\alpha = 30°$.

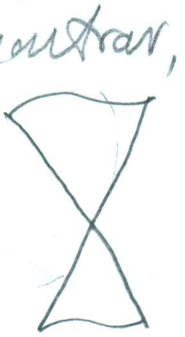
Axele reperului sunt orientate după direcția comună a cât mai multor forțe, iar polul O a fost ales acolo unde se intersectează cât mai multe forțe, adică punctul B.

Articulația este înlocuită cu două forțe egale și de sens opus cu cele cu care am înlocuit articulația la primul corp și denumite la fel.

În capătul C există un reazem. El se înlocuiește cu o forță numită reacțiune normală notată $\vec{N}$. Direcția lui $\bar{N}$ este perpendiculară pe tangenta comună în punctul de contact al celor două curbe. În acest caz, bara BC are în punctul C un punct unghiular în care nu au tangentă. Această situație se rezolvă



construind reacțiunea $\bar{N}$ perpendiculară pe tangenta la suprafața care admite tangentă (în mod obligatoriu una dintre suprafețe admite tangentă, întrucât, în caz contrar, nu putem vorbi de un reazem așa cum ar fi situația din desen)



Reacțiunea normală $\bar{N}$ se desenează perpendicular pe dreapta DC care este propria ei tangentă, în sensul ipotetic al desfacerii legăturii, adică pe verticală în sus. Modulul este necunoscut.

Ecuațiile scalare de echilibru sunt:

$$Ox: -H - F\sin\alpha = 0$$

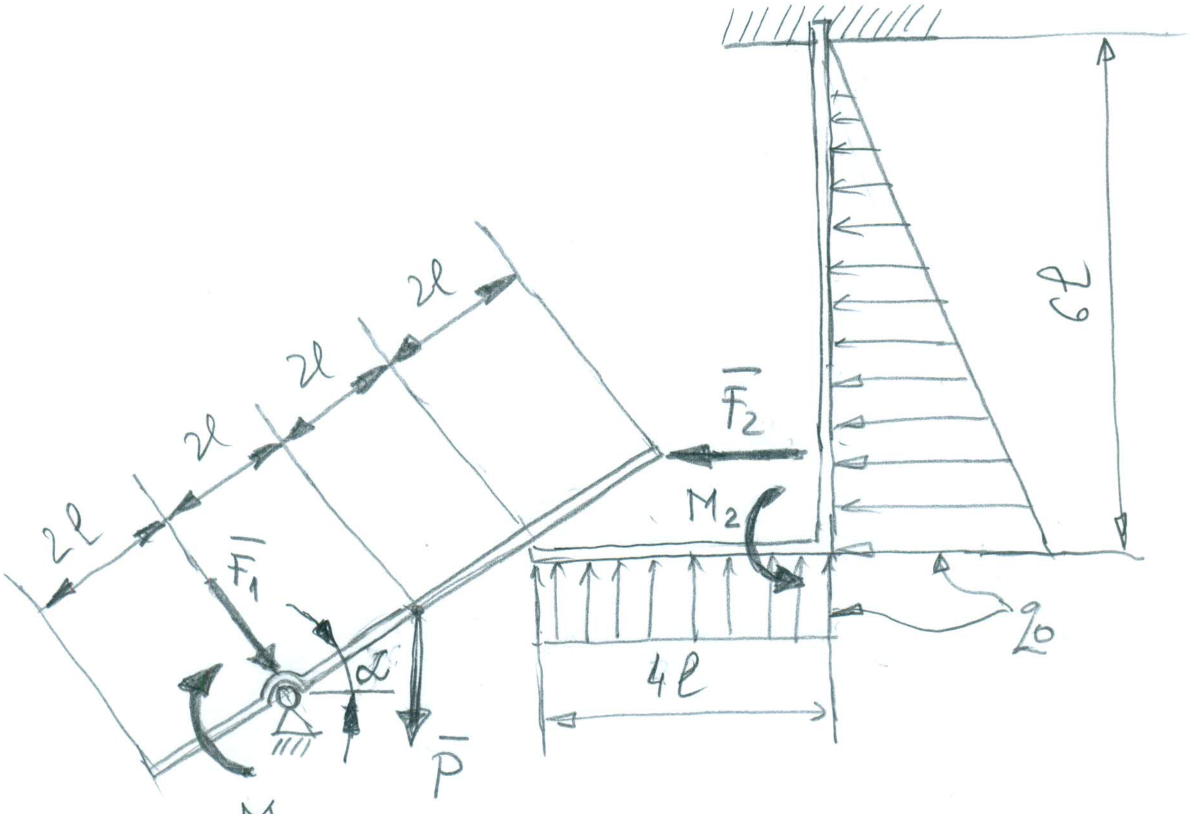
$$Oy: -V - F\cos\alpha - P + N = 0$$

$$M_0: -P\,3l\cos\alpha - M_2 + N\,6l\cos\alpha = 0$$

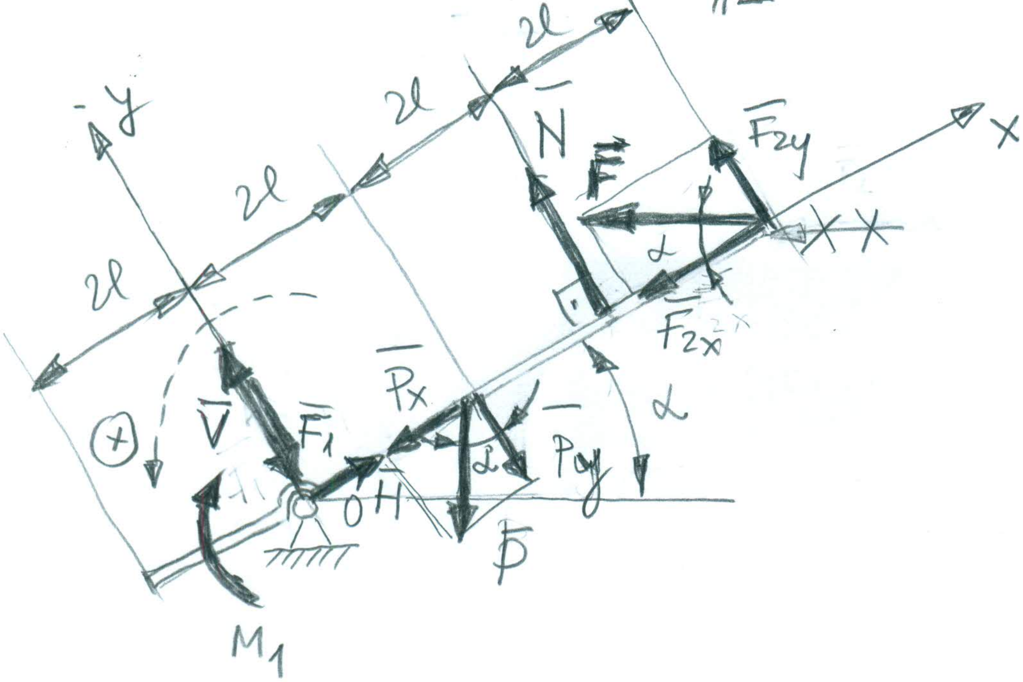
Brațul forței $\vec{P}$ este OE_1 și semnul momentului este minus. Brațul reacțiunii normale N este OE_2 și semnul momentului este plus. Momentul concentrat M_2 are semnul minus.

2. Cunoscând că sistemul din desen este în echilibru, să se scrie ecuațiile scalare de echilibru folosind metoda izolării corpurilor.

Sistemul este format din două corpuri. Primul corp este o bară articulată care se sprijină pe corpul al doilea, adică între ele există un reazem. Corpul al doilea este o bară formată din două zone perpendiculare una pe cealaltă. Bara este încastrată la un capăt. Numărul de necunoscute este format din două forțe care înlocuiesc articulația, o forță normală care înlocuiește reazemul dintre corpuri și două forțe și un moment care înlocuiesc încastrarea. În total sunt șase necunoscute și se pot scrie șase ecuații scalare de echilibru (câte trei pentru fiecare corp) deci problema este static determinată



Se izolează corpurile. Diagrama de corp liber a primului corp este reprezentată în figura următoare.



Dacă se aleg direcțiile reacțiunilor $\bar H$ și $\bar V$ din articulație în lungul barei și perpendiculară pe bară atunci, având în vedere că și forțele $\bar F_1$ și $\bar N$ au aceleași direcții, este convenabil să se aleagă reperul cu axa Ox în lungul barei și axa Oy perpendiculară pe bară iar polul O să fie în articulație. Astfel mai trebuie descompuse numai două forțe și anume $\bar P$ și $\bar F_2$.

Ecuațiile de echilibru sunt:

$$Ox: H - P\sin\alpha - F_2\cos\alpha = 0$$

$$Oy: V - F_1 - P\cos\alpha + N + F_2\sin\alpha = 0$$

$$M_0: -M_1 - P\cos\alpha \cdot 2l + N\,4l + F_2\sin\alpha\,6l = 0$$

Forțele a căror moment polar este zero deoarece trec prin pol, sunt $\bar{F}_1$, $\bar{H}$, $\bar{V}$, $\bar{P}_x = \bar{P}\sin\alpha$ și $\bar{F}_{2x} = \bar{F}_2\cos\alpha$.

Sensul pozitiv al momentelor este marcat pe desen cu un arc de cerc desenat cu linie întreruptă.

Semnul momentului concentrat M_1 este minus.

Semnul momentului forței P_y este minus. Modulul forței se găsește în ecuația de echilibru de forțe corespunzătoare axei Oy iar brațul este $2l$.

Semnul momentului reacțiunii $\bar{N}$ este plus, iar brațul ei este $4l$.

Semnul momentului forței F_{2y} este plus, modulul se găsește în ecuația de proiecții de forțe pe axa Oy iar brațul este $6l$.

Diagrama de corp liber pentru a doua bară este reprezentată în figura următoare. Mai întâi se înlocuiesc sarcinile distribuite cu rezultantele lor.

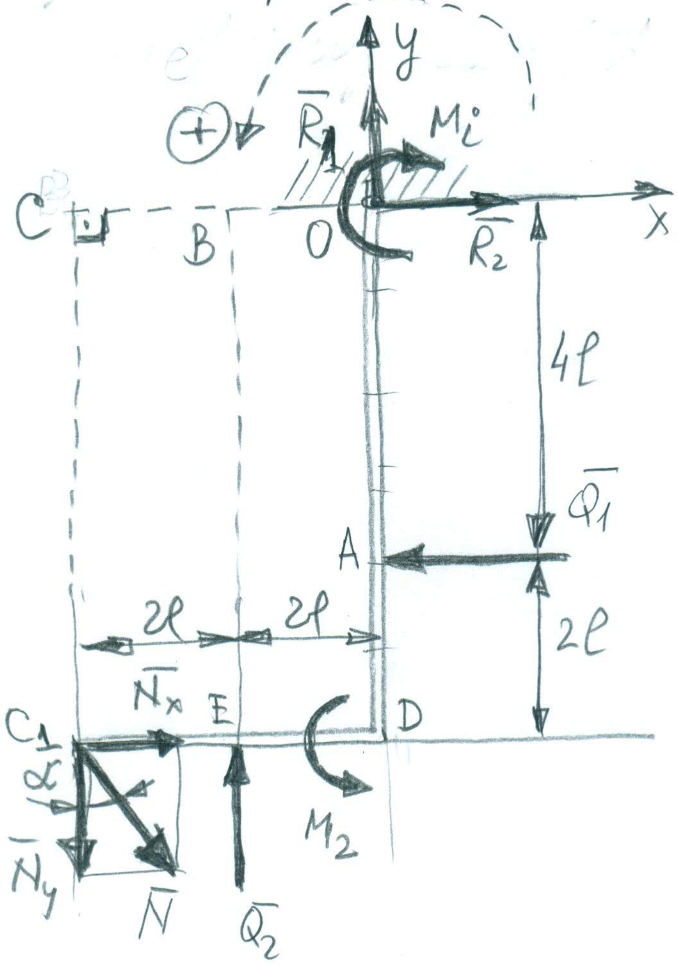
Forța distribuită triunghiular are rezultanta $\vec{Q}_1$ egală în mărime cu aria triunghiului cu săgeți adică este

$$|\overline{Q_1}| = \frac{q_0 \cdot 6l}{2} = q_0 \cdot 3l \ [N]$$

Forța distribuită dreptunghiular are rezultanta $\overline{Q_2}$ egală cu aria dreptunghiului cu săgeți, adică

$$|\overline{Q_2}| = q_0 \cdot 4l \ [N].$$

Ambele forțe trec prin centrul de masă al



figurii respectiv triunghiului și dreptunghiului.
Ecuațiile scalare de echilibru sînt:

$$Ox: \ R_2 - Q_1 + N \sin\alpha = 0$$

$$Oy: \ R_1 + Q_2 - N \cos\alpha = 0$$

$$M_O: \ +M_2 - Q_1 \cdot 4l - Q_2 \cdot 2l + N \sin\alpha \cdot 6l + N \cos\alpha \, 4l - M_i = 0$$

Momentul concentrat M_2 are semnul plus iar momentul concentrat M_1 are semnul minus.

Forța Q_1 are brațul $OA=4l$ și semnul momentului este minus.

Forța Q_2 are brațul $OB=DE=2l$ și semnul momentului este minus.

Forța N_x are brațul $OD=6l$, modulul $N\sin\alpha$ și semnul momentului este plus.

Forța N_y are brațul $OC=DC_1=4l$, modulul este $N\cos\alpha$ și momentul are semnul plus.

Observație. Dacă se pune problema în ce condiții primul corp se desprinde de cel de al doilea, atunci, după rezolvarea sistemului de ecuații de echilibru, se pune condiția ca forța normală N să fie zero. $(N=0)$

Din ecuația de momente scrisă pentru primul corp, se obține

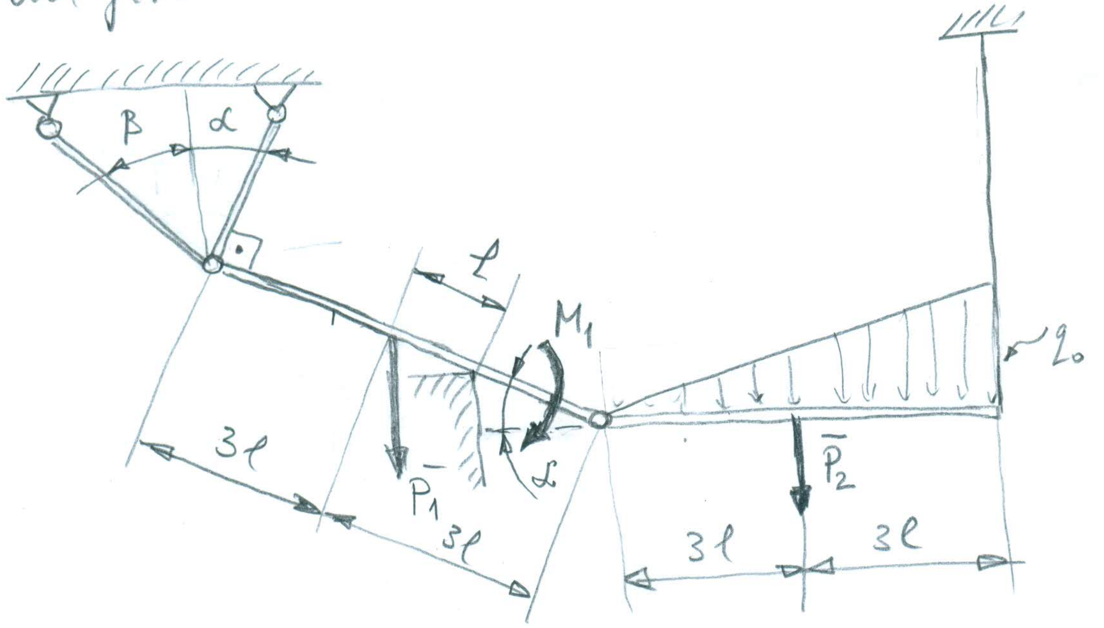
$$N=\frac{M_1+P\cos\alpha\cdot 2l-F_2\sin\alpha\cdot 6l}{4l}.$$

Dacă $N=0$ atunci rezultă

$$M_1+P\cos\alpha\cdot 2l-F_2\sin\alpha\cdot 6l=0$$

De aici se poate afla una dintre datele problemei în funcție de celelalte pentru ca să aibă loc desprinderea. De exemplu se poate afla forța F_2, momentul M_1, greutatea P ș.a.m.d. atunci când celelalte mărimi care intervin se consideră cunoscute.

③ Cunoscând că sistemul din desen este în echilibru, să se scrie ecuațiile scalare de echilibru folosind metoda izolării corpurilor. Bara înclinată este susținută de două tije iar cea orizontală de un fir.

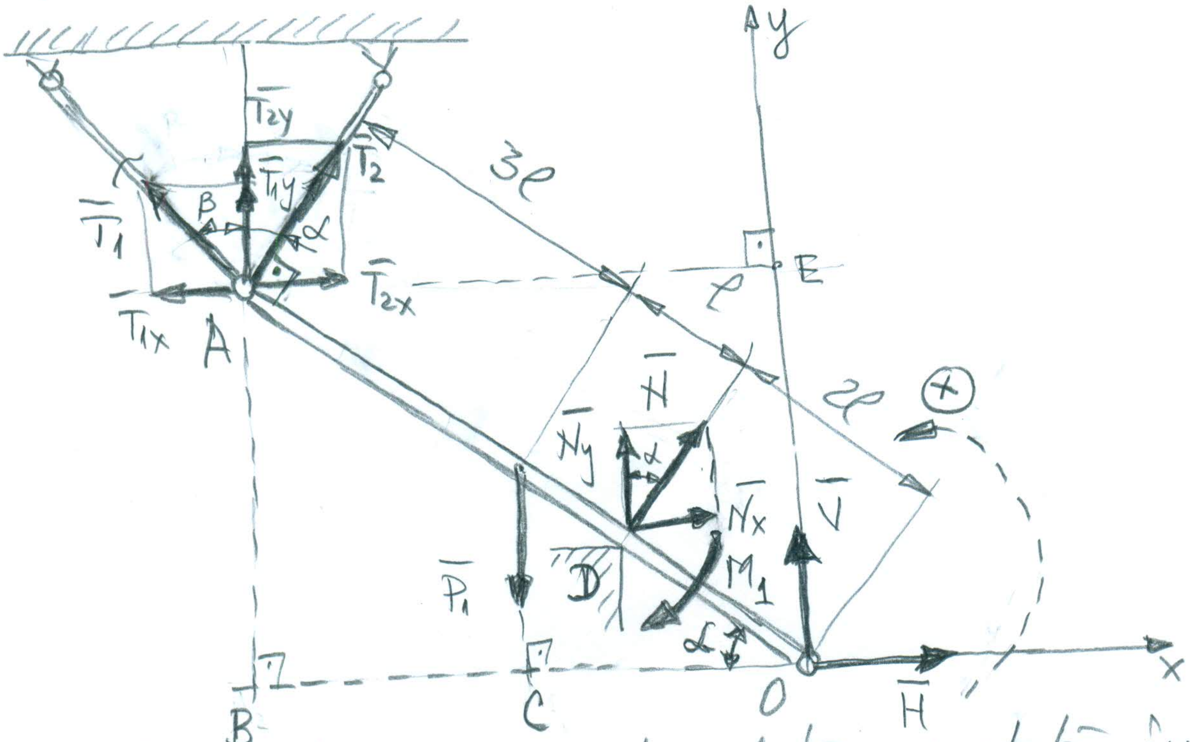


Forța distribuită continuu se înlocuiește cu o rezultantă $\overline{Q}$ care are modulul egal cu aria triunghiului

$$|\overline{Q}| = \frac{6l \cdot q_0}{2} = 3lq_0 \,[N]$$

și trece prin centrul de masă al acestuia.

Diagrama de corp liber a barei inclinate este presentată în figura următoare



Tijele se înlocuiesc cu câte o forță orientată în lungul tijei având sensul arbitrar și modulul necunoscut.

Reazemul se înlocuiește cu o reacțiune normală $\overline{N}$ perpendiculară pe bară și având sensul în sensul desprinderii ipotetice a corpului. Modulul este necunoscut.

Articulația se înlocuiește cu două forțe reciproc perpendiculare, $\overline{H}$ și $\overline{V}$, având direcțiile orisontală și verticală. Modulul lor este necunoscut.

Reperul s-a ales cu originea în articulație și cu direcțiile axelor pe orisontală și pe verticală.

Ecuațiile scalare de echilibru sunt:

$Ox: \; -T_1 \sin\beta + T_2 \sin\alpha + N \sin\alpha + H = 0$

$Oy: \; T_1 \cos\beta + T_2 \cos\alpha - P_1 + N \cos\alpha + V = 0$

$M_0: \; -M_1 - N \cdot 2l + P_1 \, 3l \cos\alpha - T_2 6l + T_1 \sin\beta \, 6l \sin\alpha +$
$+ T_1 \cos\beta \, 6l \cos\alpha = 0$

Brațul lui N este $OD = 2l$ iar semnul momentului este minus.

Brațul forței $\overline{P}_1$ este $OC = 3l\cos\alpha$ iar semnul momentului este plus ($OC = OA\cos\alpha$ în triunghiul dreptunghic OAB)

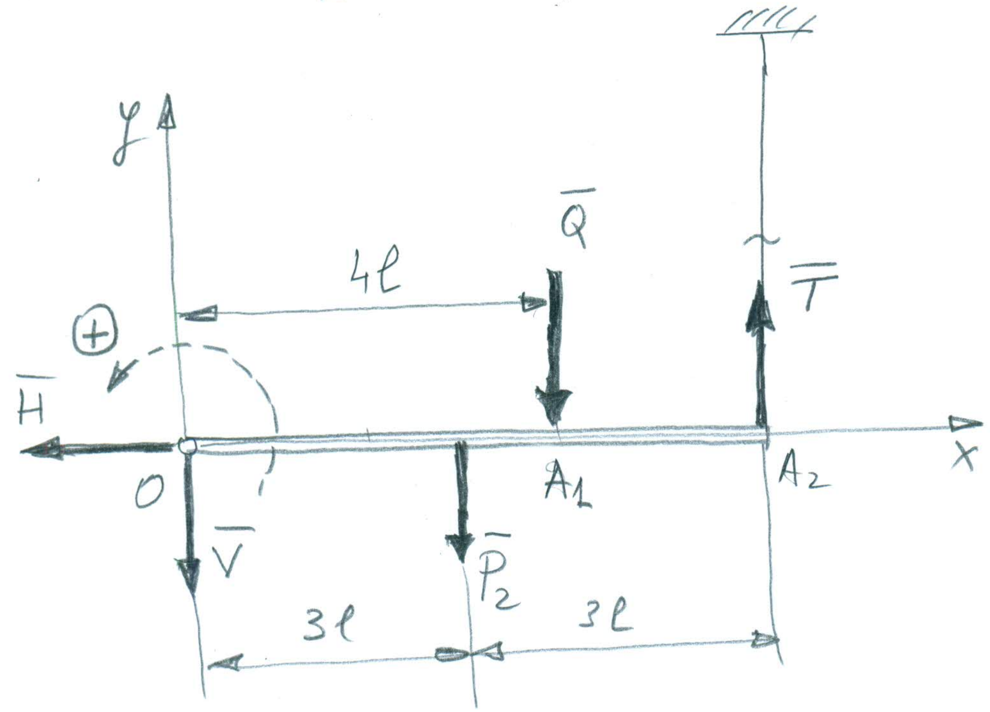
Brațul forței $\overline{T}_2$ este $OA = 6l$ deoarece $\overline{T}_2$ este perpendiculară pe bară iar semnul momentului este minus.

Brațul forței $\overrightarrow{T}_{1x}$ este $OE = AB = 6l\sin\alpha$ iar semnul momentului este plus. Modulul forței T_{1x} se extrage din ecuația de echilibru de forțe de pe direcția axei Ox.

Brațul forței $\overrightarrow{T}_{1y}$ este $OB = 6l\cos\alpha$ iar semnul momentului este minus. Modulul forței T_{1y} se extrage din ecuația de echilibru de forțe de pe direcția axei Oy.

Diagrama de corp liber a barei orizontale este reprezentată în figura următoare.

Firul se înlocuiește cu o forță denumită tensiune în fir, notată $\overline{T}$, care are direcția firului, sensul către punctul de ancorare și modulul necunoscut



Articulația se înlocuiește cu forțele $\overline{H}$ și $\overline{V}$ egale și de sens opus cu cele desenate la bara înclinată, conform principiului acțiunii și reacțiunii.

Deoarece forța rezultantă $\overline{Q}$ trece prin centrul de masă al triunghiului, distanța $OA_1 = 4l$ iar $OA_2 = 2l$.

Ecuațiile scalare de echilibru sunt:

$$Ox: \; -H = 0$$

$$Oy: \; -V - P_2 - Q + T = 0$$

$$M_0: \; -P_2 \cdot 3l - Q \cdot 4l + T \cdot 6l = 0$$

Problema are 6 necunoscute $(\overline{T}_1, \overline{T}_2, \overline{N}, \overline{H}, \overline{V}, \overline{T})$ și sunt 6 ecuații scalare de echilibru, deci este o problemă static determinată.