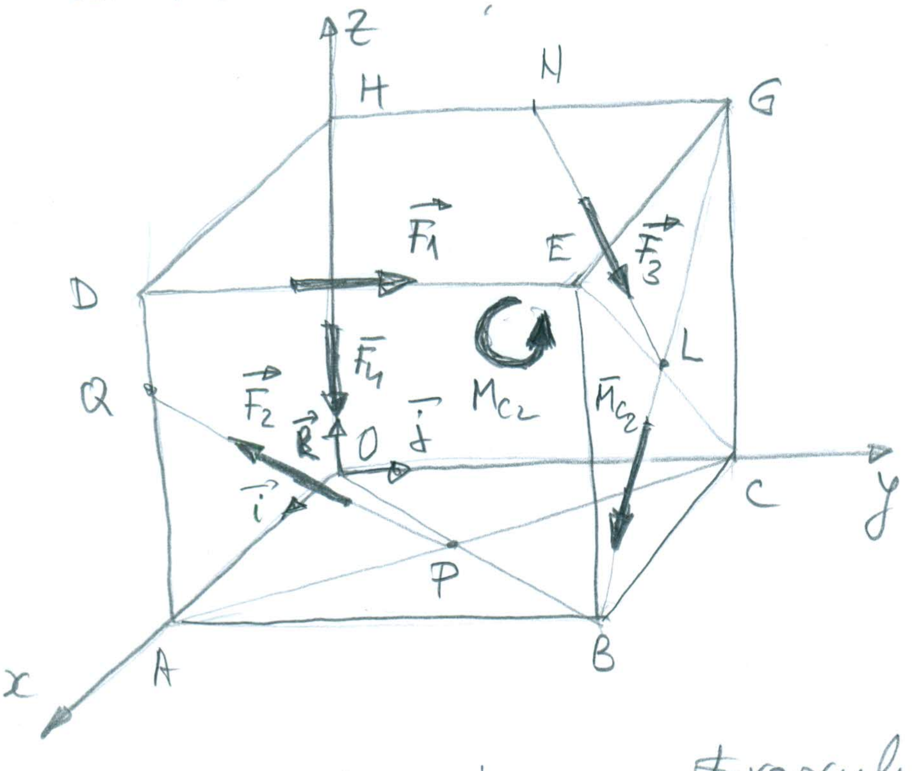
Seminarul nr. 4

Se consideră sistemul de solicitări din desen care acționează asupra unui solid rigid. Se cunosc: $OA = OC = OH = 4\,m$, $DQ = 1\,m$, $HN = NG$, $|\vec{F_1}| = 4\,N$, $|\vec{F_2}| = \sqrt{17}\,N$, $|\vec{F_3}| = 2\sqrt{3}\,N$, $|\vec{F_4}| = 1\,N$, $|\vec{M_{c_1}}| = 20\,N\cdot m$ se află în planul yOz, $|\bar{M}_{c_2}| = 4\sqrt{2}\,N\cdot m$. Să se determine:

1. Torsorul în polul O și să se precizeze sistemul simplu echivalent.
2. Axa centrală și torsorul minim.



Pentru determinarea torsorului în polul (punctul) O, trebuie calculate expresiile analitice ale vectorilor și ale momentelor lor calculate în raport cu polul O.

Pentru calculul expresiei analitice a unui vector se folosește metoda versorului care presupune determinarea coordonatelor a două puncte de pe dreapta suport a acestuia (de pe direcția acestuia). De exemplu, pentru vectorul $\vec{F_1}$ se consideră punctele $D(4, 0, 4)$ și $E(4, 4, 4)$. Formula de calcul este

$$\bar{F_1} = |F_1| \frac{(x_E - x_D)\vec{i} + (y_D - y_E)\bar{j} + (z_D - z_E)\bar{k}}{\sqrt{(x_E - x_D)^2 + (y_D - y_E)^2 + (z_D - z_E)^2}}$$

Se obține

$$\bar{F_1} = 4 \frac{(4-4)\bar{i} + (4-0)\vec{j} + (4-4)\bar{k}}{\sqrt{(4-4)^2 + (4-0)^2 + (4-4)^2}} = \cancel{4} \cdot \frac{4\bar{j}}{\cancel{4}} = 4\vec{j}$$

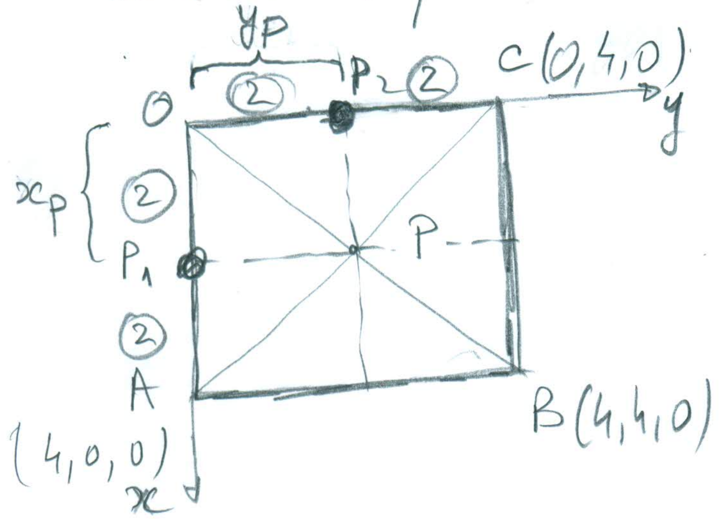
Observații:

1. Întotdeauna, la numărătorul fracției, se face diferența dintre coordonatele punctului dinspre vârful vectorului (capătul cu săgeată) și coordonatele punctului dinspre originea vectorului (capătul fără săgeată).

2. În cazul vectorului F_1 se putea obține expresia analitică fără a folosi formula de calcul. Deoarece $\bar{F_1}$ este paralel cu axa Oy, proiecțiile sale pe celelalte două axe sunt zero (nule). Înseamnă că $\vec{F_1}$ are proiecție numai după axa Oy,

egală în mărime cu modulul său. Sensul proiecției este plus deoarece sensul lui $\vec{F_1}$ este acelaşi cu sensul axei Oy (săgețile sunt orientate la fel). Deci se poate scrie direct $\vec{F_1} = 4\vec{j}$.

Pentru forța $\vec{F_2}$ se determină coordonatele punctelor P şi Q. Punctul P se află la intersecția diagonalelor pătratului OABC şi este în planul xOy deci coordonata după axa Oz este zero. Dacă privim dinspre sensul pozitiv al axei Oz, am vedea planul xOy ca în desen. Avem



$OP_1 = P_1A = \frac{OA}{2} = 2m$

$OP_2 = P_2C = \frac{OC}{2} = 2m$

Punctul P are coordonatele (2, 2, 0) iar punctul B are coordonatele (4, 4, 0).

Punctul Q este în planul xOz deci coordonata după axa Oy este zero. Coordonata după axa Ox este OA = 4 iar după axa Oz este egală cu AQ = 3. (AQ = AD − DQ = 4 − 1 = 3). Prin urmare punctul Q are coordonatele (4, 0, 3).

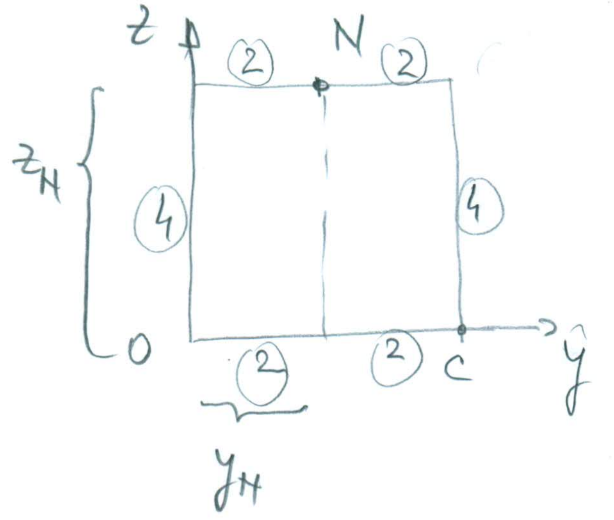
Forța $\bar{F}_2$ are expresia analitică

$$\bar{F}_2 = |\vec{F_2}| \cdot \frac{(x_Q - x_P)\vec{i} + (y_Q - y_P)\vec{j} + (z_Q - z_P)\vec{k}}{\sqrt{(x_Q - x_P)^2 + (y_Q - y_P)^2 + (z_Q - z_P)^2}} = \sqrt{17}\,\frac{(4-2)\vec{i} + (0-2)\vec{j} + (3-0)\vec{k}}{\sqrt{(2)^2 + (-2)^2 + (3)^2}} =$$

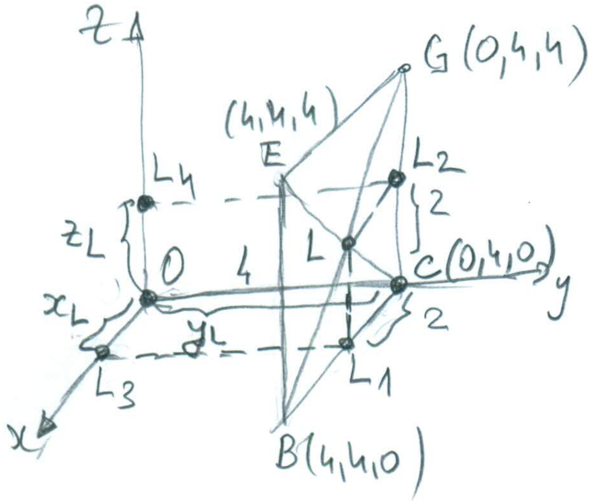
$$= \sqrt{17}\,\frac{2\vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}}{\sqrt{4+4+9}} = \cancel{\sqrt{17}}\,\frac{2\vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}}{\cancel{\sqrt{17}}} = 2\vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$$

Pentru forța $\bar{F}_3$ se determină coordonatele punctelor N și L.

Punctul N se află în planul yOz deci coordonata după axa Ox este zero. Dacă privim dinspre axa Ox, atunci planul yOz arată ca în desen. Coordonata după axa Oy a punctului N ~~este~~ 2 iar după axa Oz este 4.



Cu alte cuvinte, punctul N are coordonatele (0, 2, 4).



Punctul L se află în centrul pătratului BCGE. Avem deci $CL_1 = CL_2 = OL_3 = OL_4 = 2$. Coordonata după axa Oy este OC = 4. Rezultă că punctul C are coordonatele (2, 4, 2).

$$\vec{F_3} = |\vec{F_3}| \frac{(x_L - x_N)\vec{i} + (y_L - y_N)\vec{j} + (z_L - z_N)\vec{k}}{\sqrt{(x_L - x_N)^2 + (y_L - y_N)^2 + (z_N - z_L)^2}} =$$

$$= 2\sqrt{3}\,\frac{(2-0)\vec{i} + (4-2)\vec{j} + (2-4)\vec{k}}{\sqrt{2^2 + 2^2 + (-2)^2}} = 2\sqrt{3}\,\frac{2\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}}{\sqrt{4+4+4}} =$$

$$= 2\sqrt{3} \cdot \frac{2\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}}{\sqrt{3 \cdot 4}} = \cancel{2\sqrt{3}}\,\frac{2\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}}{\cancel{\sqrt{3} \cdot 2}} = 2\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}$$

Forța $\vec{F_4}$ este coliniară cu axa Oz și are sensul opus acesteia. Proiecțiile ei pe axele Ox și Oy sunt zero. Prin urmare putem scrie $\vec{F_4} = -1 \cdot \vec{k} = -\vec{k}$

Pentru a aduna vectorii facem următorul tabel

	$\vec{i}$	$\vec{j}$	$\vec{k}$
$\vec{F_1}$	0	4	0
$\vec{F_2}$	2	-2	3
$\vec{F_3}$	2	2	-2
$\vec{F_4}$	0	0	-1
$\vec{R}$	4	4	0

Vectorul rezultant are expresia analitică

$$\vec{R} = 4\vec{i} + 4\vec{j}.$$

iar modulul este $|\vec{R}| = \sqrt{4^2 + 4^2} = 4\sqrt{2}$ N

Momentele în raport cu polul O ale vectorilor forță le calculăm ca produsul vectorial dintre vectorul de poziție al unui punct de pe suport și vectorul considerat. Se preferă a se alege un punct de pe suport care are coordonatele cât mai simple, eventual cu unul sau mai multe zerouri.

Momentul vectorului $\bar{F}_1$ în raport cu polul O se calculează folosind fie vectorul de poziție al punctului D (4,0,4) fie al punctului E (4,4,4). Se preferă punctul D și avem

$$\bar{M}_0(\bar{F}_1) = \vec{r}_D \times \bar{F}_1 = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 4 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 0 \end{vmatrix} = -16\vec{i} + 16\bar{k}$$

observații

1. Dacă se utiliza punctul E rezultatul era același (momentul nu depinde de punctul ales pe suportul vectorului).
2. Deoarece vectorul $\bar{F}_1$ este paralel cu axa Oy el nu va avea componentă a momentului după această axă (veri momentul axial - proprietăți de la curs).

Pentru calculul momentului lui $\bar{F}_2$ se consideră punctul P (2,2,0) și avem

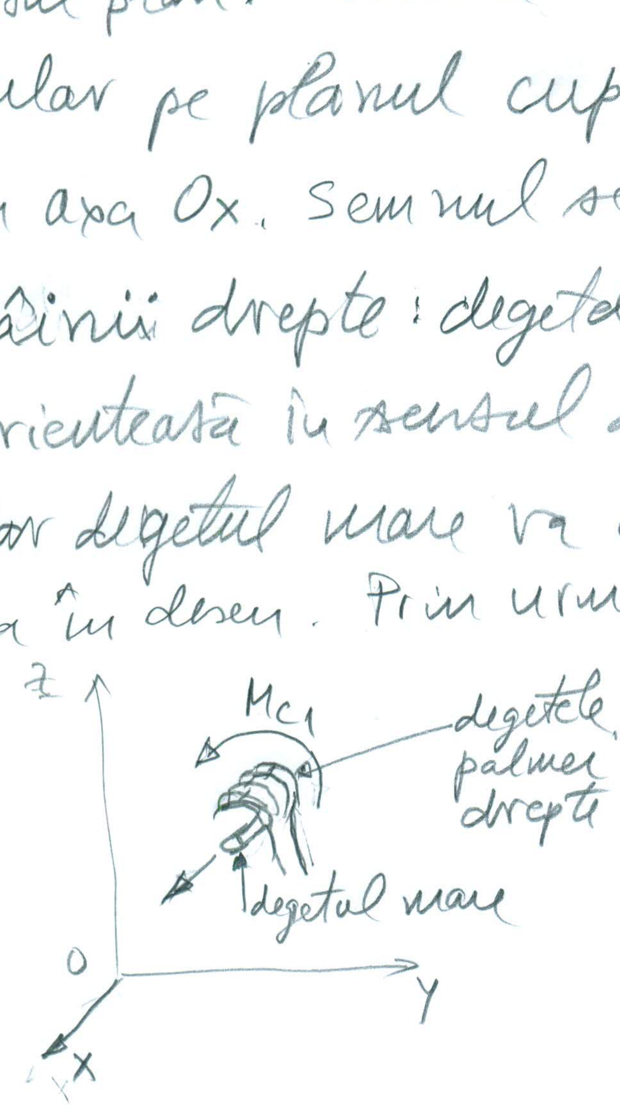
$$\bar{M}_0(\vec{F}_2) = \vec{r}_P \times \vec{F}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 6\vec{i} - 6\vec{j} - 8\bar{k}$$

Pentru calculul momentului lui $\bar{F}_3$ se consideră punctul N (0,2,4) și rezultă:

$$\bar{M}_0(\bar{F}_3)=\vec{R}_N\times\bar{F}_3=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 0 & 2 & 4\\ 2 & 2 & -2\end{vmatrix}=-12\vec{i}+8\vec{j}-4\vec{k}$$

observație: Pentru calculul determinantului se poate folosi orice regulă pe care o cunoașteți.

Momentul $\vec{M}_{C_1}$ este reprezentat ca o săgeată circulară situată în planul cuplului. Acest mod de reprezentare este adesea utilizat în inginerie mai ales în cazul plan. Vectorul moment este perpendicular pe planul cuplului deci va fi paralel cu axa Ox. Semnul se stabilește cu regula mâinii drepte: degetele palmei drepte se orientează în sensul de rotație al cuplului iar degetul mare va arăta sensul momentului. ca în desen. Prin urmare semnul cuplului M_{C1} este plus, deci



$$\vec{M}_{C_1}=+|\bar{M}_{C_1}|\cdot\vec{i}=+20\vec{i}\ N\cdot m$$

Cuplul $\vec{M}_{C_2}$ este reprezentat ca un vector obișnuit.

Determinarea expresiei analitice a unui vector cu ajutorul coordonatelor a două puncte de pe suport se aplică la orice mărime vectorială nu numai la forțe. Pentru cuplul $\vec{M}_{c_2}$ se folosesc punctele $L(2,4,2)$ și $B(4,4,0)$:

$$\vec{M}_{c_2} = |\bar{M}_{c_2}| \cdot \frac{(x_B - x_L)\vec{i} + (y_B - y_L)\bar{j} + (z_B - z_L)\vec{k}}{\sqrt{(x_B - x_L)^2 + (y_B - y_L)^2 + (z_B - z_L)^2}} =$$

$$= 4\sqrt{2} \cdot \frac{(4-2)\bar{i} + (4-4)\bar{j} + (0-2)\bar{k}}{\sqrt{2^2 + 0^2 + (-2)^2}} = 4\sqrt{2}\,\frac{2\bar{i} - 2\bar{k}}{\sqrt{4+4}} =$$

$$= \overset{2}{\cancel{4}}\cancel{\sqrt{2}} \cdot \frac{2\vec{i} - 2\bar{k}}{\cancel{2}\cancel{\sqrt{2}}} = 4\bar{i} - 4\bar{k}$$

Observație: Dacă dreapta suport a unei forțe trece prin polul O, atunci momentul ei polar este zero. De aceea $\bar{M}_0(\bar{F}_4) = 0$.

Pentru calcularea sumei momentelor vom face următorul tabel

	$\bar{i}$	$\bar{j}$	$\bar{k}$
$M_0(\bar{F}_1)$	-16	0	16
$\bar{M}_0(\bar{F}_2)$	6	-6	-8
$\bar{M}_0(\bar{F}_3)$	-12	8	-4
$M_0(\bar{F}_4)$	0	0	0
$\vec{M}_{c_1}$	20	0	0
$\vec{M}_{c_2}$	4	0	4
$\vec{M}_0$	2	2	0

← poate lipsi din tabel

Vectorul moment rezultant în polul O este deci:

$$\vec{M_0} = 2\vec{i} + 2\vec{j} \qquad |\vec{M_0}| = \sqrt{2^2+2^2} = 2\sqrt{2}\ N\cdot m$$

Prin urmare torsorul în polul O al sistemului este

$$T_0 = \begin{cases} \vec{R} = 4\vec{i} + 4\vec{j} \neq 0 \\ \vec{M_0} = 2\vec{i} + 2\vec{j} \neq 0 \end{cases}$$

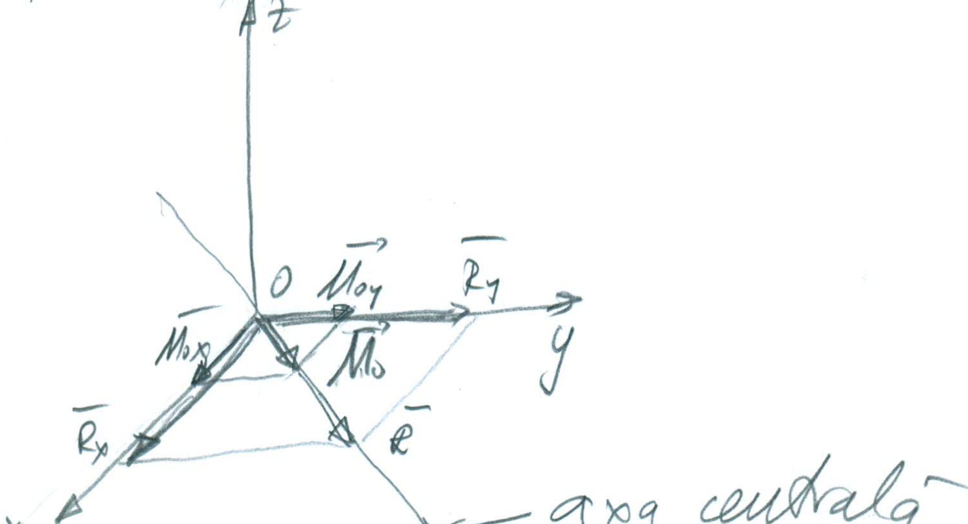
Pentru a preciza cu care dintre cele 4 sisteme simple de vectori este echivalent sistemul dat, trebuie să comparăm cu zero caracteristicile torsorului, adică mărimile $\vec{R}$, $\vec{M_0}$ și $\vec{R}\cdot\vec{M_0}$. Avem:

$\vec{R} \neq 0$

$\vec{M_0} \neq 0$

$\vec{R}\cdot\vec{M_0} = 4\cdot 2 + 4\cdot 2 = 16 \neq 0$

sistemul este echivalent cu un vector și un cuplu sau cu un torsor propriu zis.

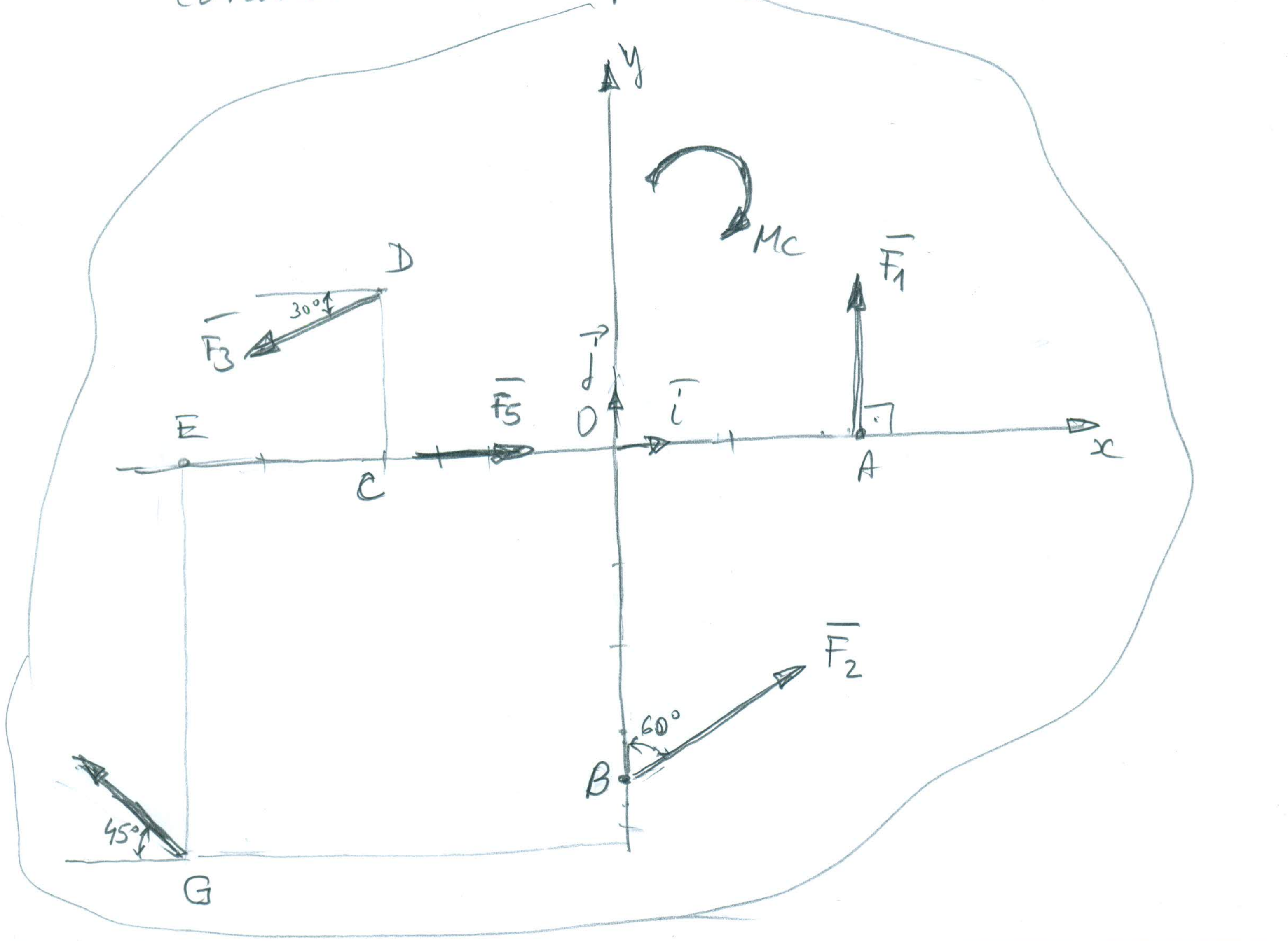


2. In acest caz de reducere se pune problema axei centrale ca loc geometric al punctelor care, când sunt luate ca pol, vectorul moment rezultant are valoarea minimă $\overrightarrow{M}_{min} = \frac{\overline{R} \cdot \overline{M}_O}{R^2} \overrightarrow{\overline{R}}$ și este coliniar cu vectorul rezultant. Ea trece prin punctul P_0 care are vectorul de poziție $\overline{r}_{P_0} = \frac{\overrightarrow{\overline{R}} \times \overline{M}_O}{R^2}$ și este paralelă cu $\overline{R}$.

In acest caz $\overline{R} \times \overline{M}_O = 0$ deci axa centrală trece prin polul O și are direcția OB. Momentul minim este chiar $\overline{M}_O$. Prin urmare torsorul minim este chiar torsorul sistemului în polul O.

Se consideră sistemul de solicitări din desen care acționează asupra unui solid rigid. Se cunosc: $|\vec{F_1}| = 2N$, $|\vec{F_2}| = 2N$, $|\vec{F_3}| = 4N$, $|\vec{F_4}| = 2\sqrt{2}N$, $|\vec{F_5}| = \sqrt{3}N$, $|\vec{M_C}| = 2N\cdot m$, $OA = 2m$, $OB = 2\sqrt{3}m$, $OC = 2m$, $CD = \sqrt{3}m$, $OE = EG = 4m$. Să se determine:

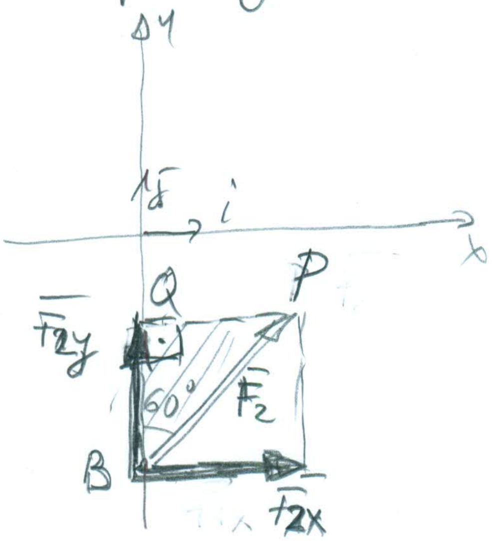
1. Torsorul în polul O și să se precizeze sistemul simplu echivalent.
2. Axa centrală
3. Să se determine un vector $\vec{F}$ care, adăugat sistemului să-l transforme într-un sistem echivalent cu zero.
4. Să se determine un vector $\vec{V}$ care, adăugat sistemului inițial, să-l transforme într-un sistem echivalent cu un cuplu egal cu $6\vec{k}$.



1. Forța $\overline{F_1}$ este paralelă cu axa Oy deci proiecția ei pe axa Ox este zero. Sensul lui $\overline{F_1}$ este acelaşi cu al axei Oy deci avem

$$\vec{F_1} = 2\vec{j}$$

Pentru a găsi expresia analitică a forței $\overline{F_2}$ ea se descompune după direcțiile axelor Ox și Oy. Pentru aceasta, se construiește un dreptunghi care are ca diagonală forța $\overline{F_2}$



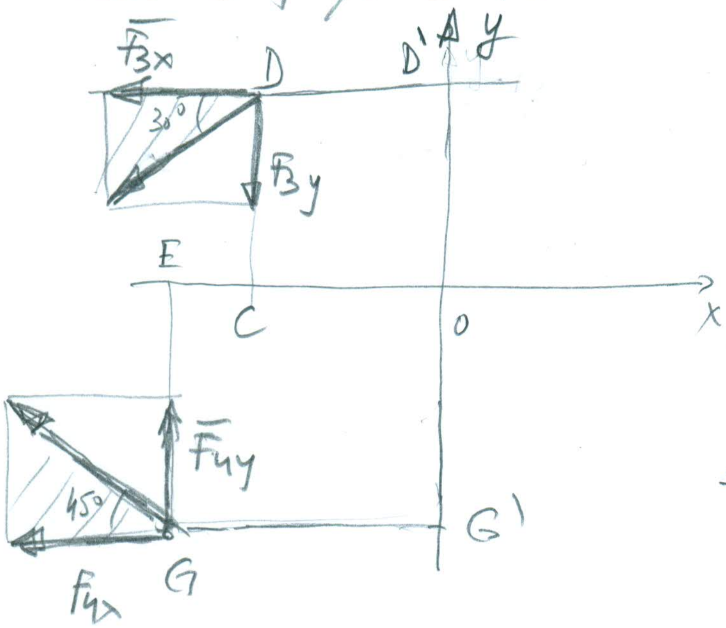
ca în desen. Apoi, plecând din originea lui $\overline{F_2}$ (punctul B) se desenează cele două componente $\vec{F_{2x}}$ și $\overline{F_{2y}}$. Ne alegem apoi un triunghi dreptunghic în care lucrăm. Fie acesta triunghiul BPQ în care BP este ipotenuză. BQ este catetă alăturată și se calculează cu funcția cosinus iar QP este catetă opusă și se calculează cu funcția sinus. PQ este egl cu F_{2x}. Semnele componentelor se stabilesc comparând sensul acestora cu sensul axei cu care sunt paralele sau coliniare.

Avem astfel

$$\overline{F_2} = \overline{F_{2x}} + \overline{F_{2y}} = +|\overline{F_2}|\sin 60^\circ \vec{i} + |\overline{F_2}|\cos 60^\circ \bar{j} = 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\bar{i} + 2\frac{1}{2}\bar{j} =$$

$$= \sqrt{3}\,\bar{i} + \bar{j}$$

Pentru forța $\overline{F_3}$ rezultă $\overline{F_3} = \overline{F_{3x}} + \overline{F_{3y}} = -|\overline{F_3}|\cos 30^\circ \vec{i} - |\overline{F_3}|\sin 30^\circ \vec{j} = -4\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{i} - 4\frac{1}{2}\vec{j} = -2\sqrt{3}\,\vec{i} - 2\vec{j}$.



Pentru forța $\overline{F_4}$ rezultă

$\vec{F_4} = \vec{F_{4x}} + \vec{F_{4y}} = -|\overline{F_4}|\cos 45^\circ \vec{i} + |\overline{F_4}|\sin 45^\circ \vec{j} = -2\sqrt{2}\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} + 2\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j} = -2\vec{i} + 2\vec{j}$

Forța $\overline{F_5}$ este coliniară cu axa Ox deci nu are proiecție pe axa Oy. Rezultă

$$\overline{F_5} = \sqrt{3}\,\vec{i}$$

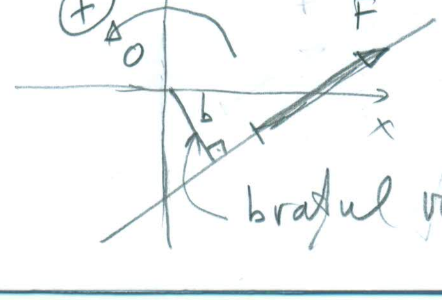
Suma celor cinci forțe se face cu tabelul următor

	$\bar{i}$	$\bar{j}$
$\overline{F_1}$	0	2
$\overline{F_2}$	$\sqrt{3}$	1
$\overline{F_3}$	$-2\sqrt{3}$	-2
$\overline{F_4}$	-2	$+2$
$\overline{F_5}$	$\sqrt{3}$	0
$\vec{R}$	-2	3

Vectorul rezultant este $\vec{R} = -2\vec{i} + 3\vec{j}$

Momentele se determină prin metoda „cu brațul".

$$\overline{M_O}(\overline{F}) = \pm\, b\,|\overline{F}|\cdot\vec{k}$$



b este brațul forței și este lungimea perpendicularei construită din O pe dreapta brațul vectorului suport a forței. Semnul se obține cu regula observatorului: dacă, atunci când privim dinspre sensul pozitiv al axei Oz, vectorul tinde să rotească brațul în sens trigonometric direct (Ox peste Oy), atunci semnul momentului este plus (vezi desenul). Dacă suportul forței trece prin pol atunci brațul este zero și momentul ~~forței~~ este tot zero.

Brațul forței $\bar{F}_1$ este OA și semnul este plus:

$$\bar{M}_0(\bar{F}_1) = +|OA| \cdot |\bar{F}_1| \cdot \bar{k} = 2 \cdot 2 \cdot \bar{k} = 4\bar{k}$$

Pentru calculul momentului unui vector se va folosi proprietatea care afirmă că momentul unui vector este egal cu suma momentelor componentelor. Momentul forței $\bar{F}_2$ este

$$\bar{M}_0(\bar{F}_2) = \bar{M}_0(\bar{F}_{2x}) + \bar{M}_0(\bar{F}_{2y})$$

$\bar{M}_0(\bar{F}_{2y})$ este zero deoarece componenta $\bar{F}_{2y}$ trece cu suportul prin punctul O. Brațul componentei $\bar{F}_{2x}$ este OB iar semnul momentului ei este plus:

$$\bar{M}_0(\bar{F}_2) = \bar{M}_0(\bar{F}_{2x}) = |OB| \cdot |\bar{F}_{2x}| \bar{k} = 2\sqrt{3}\sqrt{3} = 6\bar{k}$$

Modulul fiecărei componente se găsește în tabelul utilizat pentru calculul forței rezultante.

<u>Observații</u> 1. Între semnul momentului și semnul componentei nu este nicio legătură, componenta contribuind în formulă cu modulul ei.

2. În cazul plan forțele sunt după $\bar{i}$ și $\bar{j}$ iar momentele numai după $\bar{k}$. Forța și momentul ei polar sunt vectori perpendiculari.

Momentul forței $\bar{F}_3$ este (vezi desenul de la calculul componentelor):

$$\bar{M}_0(\bar{F}_3) = \bar{M}_0(\bar{F}_{3x}) + \bar{M}_0(\bar{F}_{3y}) = +|OD'|\,|\bar{F}_{3x}|\,\bar{k} + |OC|\,|\bar{F}_{3y}|\,\bar{k} =$$

$$= +|CD|\cdot|\bar{F}_{3x}| + |OC|\cdot|\bar{F}_{3y}| = \sqrt{3}\,|-2\sqrt{3}|\,\bar{k} + 2\cdot|-2|\,\bar{k} =$$

$$= \sqrt{3}\cdot 2\sqrt{3}\,\bar{k} + 4\bar{k} = 10\,\bar{k}$$

Momentul forței $\bar{F}_4$ este (vezi desenul de la calculul componentelor):

$$\bar{M}_0(\bar{F}_4) = \bar{M}_0(\bar{F}_{4x}) + \bar{M}_0(\bar{F}_{4y}) = -|OG'|\cdot|\bar{F}_{4x}|\,\bar{k} - |OE|\cdot|\bar{F}_{4y}|\,\bar{k} =$$

$$= -|EG|\,|\vec{F}_{4x}|\,\bar{k} - |OE|\,|\bar{F}_{4y}|\,\bar{k} = -4\cdot|-2|\,\bar{k} - 4|2|\,\bar{k} =$$

$$= -8\bar{k} - 8\bar{k} = -16\,\bar{k}$$

Momentul forței $\bar{F}_5$ este zero deoarece este colineară cu axa Ox care trece prin punctul O.

Momentul cuplului este un vector perpendicular pe planul în care este desenată săgeata circulară (xOy) deci va fi un vector dirijat după axa Oz. Semnul se stabilește cu regula mâinii drepte (vezi problema anterioară)

Prin urmare $\vec{M}_c = -|\bar{M}_c|\cdot\bar{k} = -2\bar{k}$

Vectorul moment rezultant în polul O este

$$\bar{M}_O = \bar{M}_O(\bar{F}_1) + \bar{M}_O(\bar{F}_2) + \bar{M}_O(\bar{F}_3) + \bar{M}_O(\bar{F}_4) + \bar{M}_O(\bar{F}_5) + \bar{M}_C = 2\bar{k}$$

Torsorul în polul O al sistemului

$$T_O = \begin{cases} \bar{R} = -2\bar{i} + 3\bar{j} \neq 0 \quad |\bar{R}| = \sqrt{2^2+3^2} = \sqrt{13}\ N \\ \bar{M}_O = 2\bar{k} \neq 0 \quad |\bar{M}_O| = 2\ N \cdot m. \end{cases}$$

Deoarece $\bar{R} \cdot \bar{M}_O = 0$ sistemul este echivalent cu un vector unic egal cu vectorul rezultant și situat pe axa centrală a sistemului.

(2) Ecuația axei centrale este

$$x R_y - y R_x = M_O, \text{ adică}$$

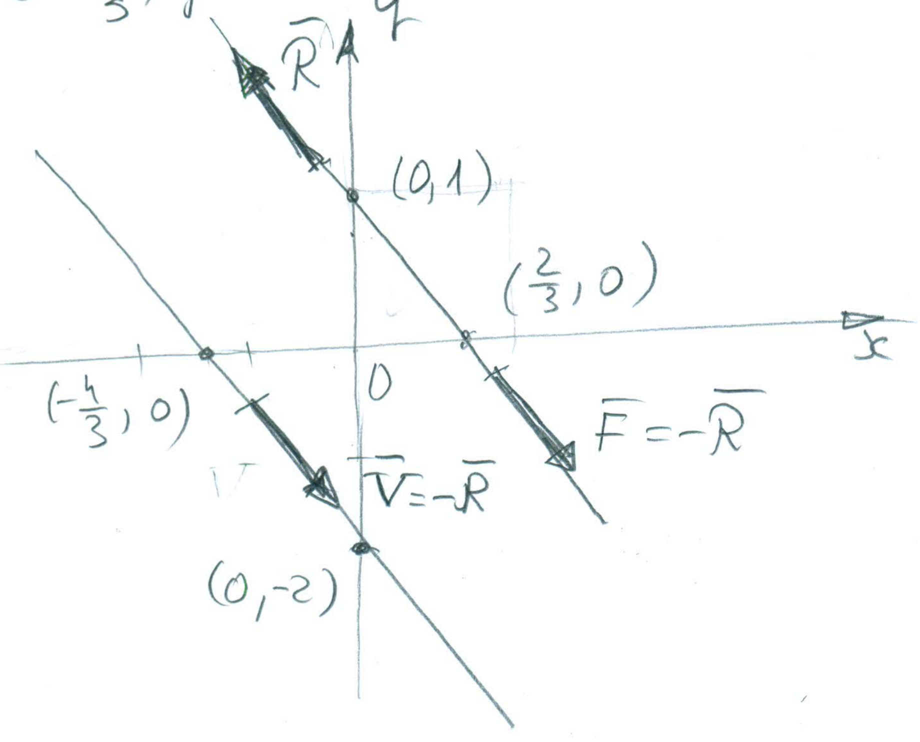
$$x \cdot 3 - y(-2) = 2$$

sau

$$3x + 2y = 2.$$

Punctele în care axa centrală intersectează axele de coordonate sunt $(x=0, y=1)$ și

$(x = \frac{2}{3}, y = 0)$



Dacă asupra rigidului punem să acționeze forța $\bar{R}$ situată pe axa centrală în locul întregului sistem, corpul va avea aceeași mișcare.

③ Având în vedere cele de mai sus, pentru ca sistemul să devină echivalent cu zero trebuie adăugată o forță $\bar{F}$ pe axa centrală egală și de sens opus cu $\bar{R}$ (vezi desenul).

④ Dacă adăugăm sistemului inițial un vector $\bar{V}$ se obține un nou sistem al cărui torsor are caracteristicile:

$$\bar{R}^{(1)} = \vec{R} + \vec{V} = 0$$

$$\bar{M}_0^{(1)} = \bar{M}_0 + \bar{M}_0(\bar{V}) = 6\bar{k}$$

$$\bar{R}^{(1)} \cdot \bar{M}_0^{(1)} = 0$$

Rezultă că $\bar{V} = -\bar{R} = 2\bar{i} - 3\bar{j}$ și

$$\bar{M}_0(\bar{V}) = 6\bar{k} - \vec{M}_0 = 6\bar{k} - 2\bar{k} = 4\bar{k}$$

Ecuația suportului este

$$x V_y - y V_x = M_0(\bar{V}) \text{ adică}$$

$$x(-3) - y(2) = 4$$

$$-3x - 2y = 4$$

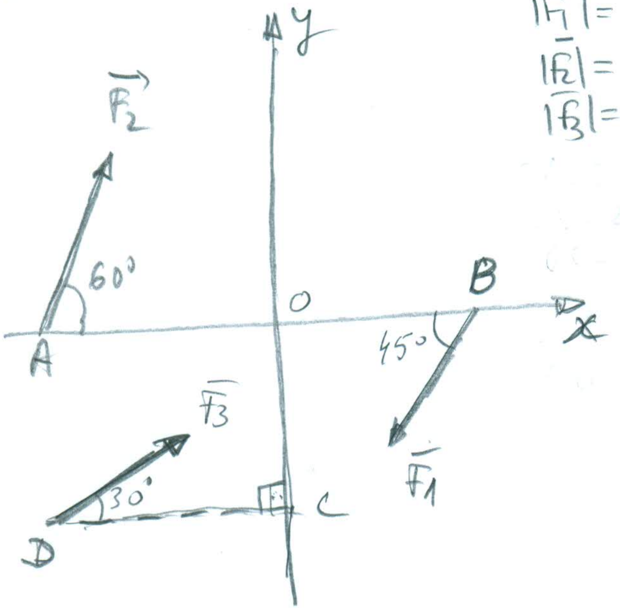
Intersecția suportului cu axele este $(x=0, y=-2)$ și $(x=-\frac{4}{3}, y=0)$. Pe dreaptă se așează vectorul $\bar{V} = -\bar{R}$ (vezi desenul)

Probleme propuse

Să se calculeze torsorul în polul O și să se precizeze sistemul simplu echivalent.

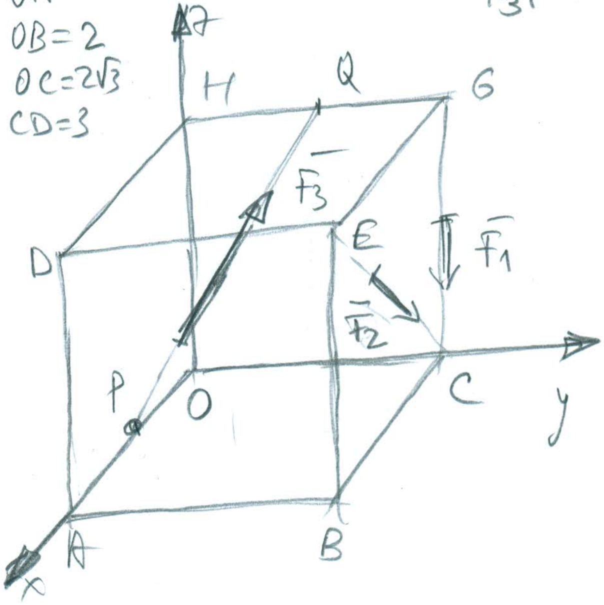
①

$|\bar{F}_1| = 4\sqrt{2}$ $OA = 3\sqrt{3}$
$|\bar{F}_2| = 2$ $OB = 2$
$|\bar{F}_3| = 4$ $OC = 2\sqrt{3}$
$CD = 3$



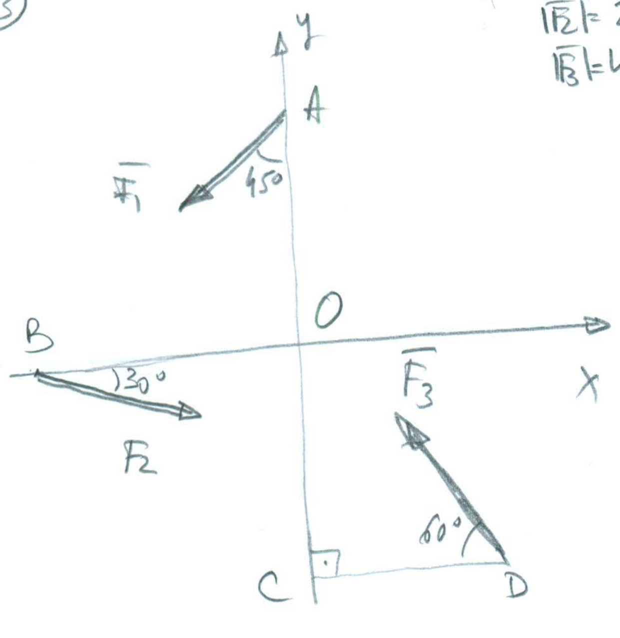
②

$|\bar{F}_1| = 2$ $OA = OC =$
$|\bar{F}_2| = 2\sqrt{2}$ $= OH = 4$
$|\bar{F}_3| = 4\sqrt{6}$ $OP = PA$
$HQ = QG$



③

$|\bar{F}_1| = 3\sqrt{2}$ $OA = 2$
$|\bar{F}_2| = 2$ $OB = 4$
$|\bar{F}_3| = 4$ $OC = 4$
$CD = 2\sqrt{3}$



$|\bar{F}_1| = 4$ $OA = OC = 6$
$|\bar{F}_2| = 2\sqrt{13}$ $OH = 4$
$|\bar{F}_3| = 2\sqrt{3}$ $CP = DQ = \frac{OA}{3}$