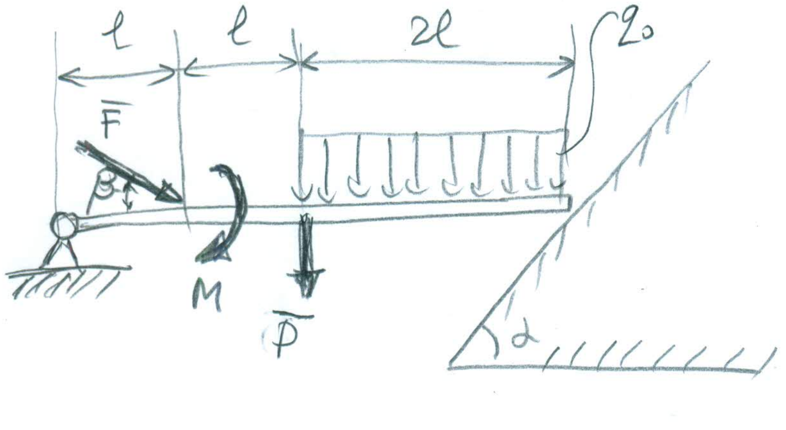
Seminarul 8

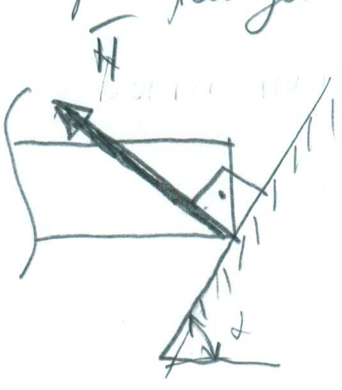
① Cunoscând că bara din desen este în echilibru, să se scrie ecuațiile scalare de echilibru.



Bara din desen este supusă la următoarele legături:

a) în partea stângă este o articulație cilindrică. Ea se înlocuiește cu două forțe reciproc perpendiculare de direcții arbitrare.

b) în partea dreaptă bara se sprijină pe un plan înclinat, adică are o legătură numită reazem. Ea se înlocuiește cu o forță de reacțiune numită normala, perpendiculară pe tangenta comună în punctul de contact.



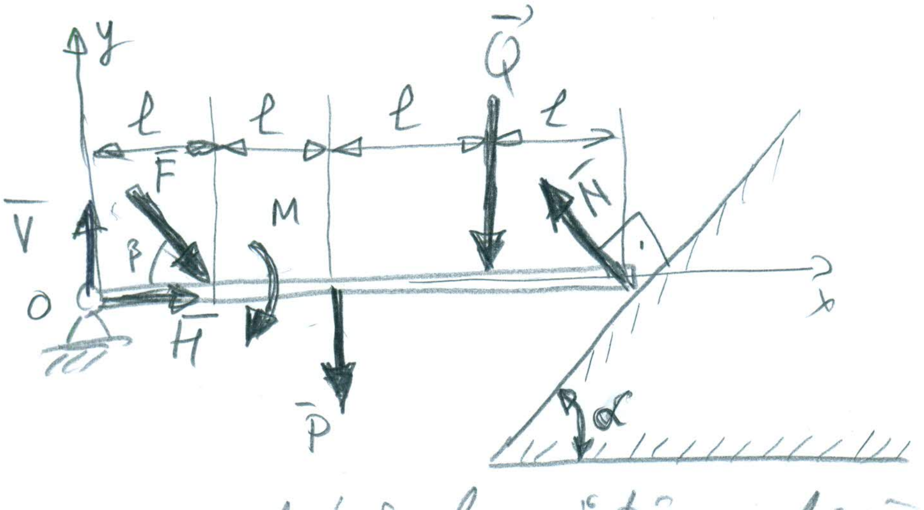
~~Deoarece~~ bara nu admite tangentă în punctul de contact, reacțiunea normala $\bar{N}$ se pune perpendiculară pe planul înclinat în sensul ipotetic al părăsirii legăturii, așa cum se arată în desen.

Forța distribuită continuu de intensitate constantă $q_0\left[\frac{N}{m}\right]$ se înlocuiește cu o forță rezultantă $\bar{Q}$ care are modulul egal cu aria acoperită cu săgeți

$$|\bar{Q}| = q_0 \cdot 2l\,[N]$$

și trece prin centrul de masă al acestei arii de formă dreptunghiulară.

Corpul supus acțiunii forțelor date și de legătură este reprezentat în figura de mai jos:

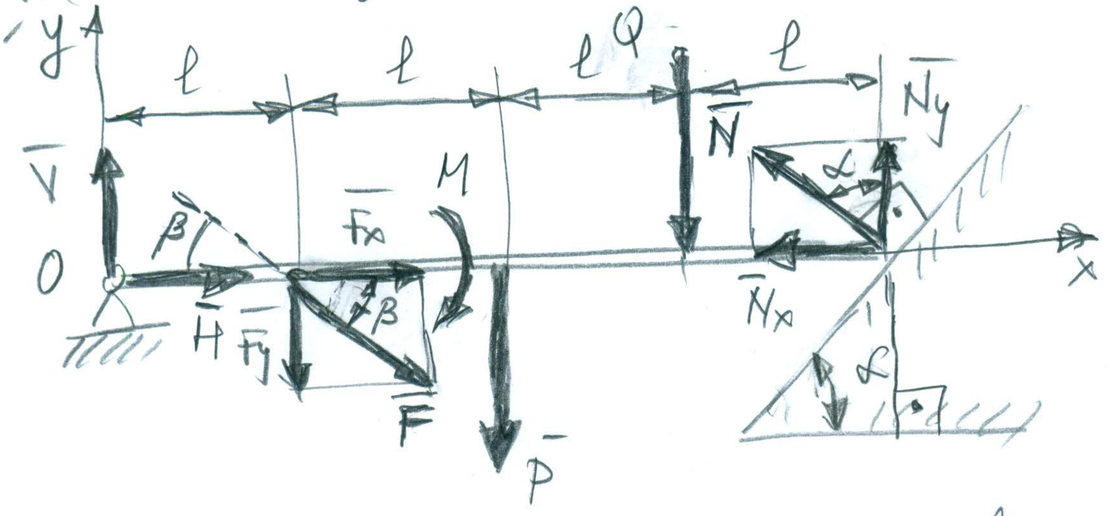


Articulația a fost înlocuită cu două forțe $\bar{H}$ și $\bar{V}$ reciproc perpendiculare care acționează după direcție orizontală și verticală. După aceste direcții acționează acum $\bar{H}, \bar{V}$, $\bar{P}$ și $\bar{Q}$, iar reperul este ales ca în desen. Vor trebui descompuse numai forțele $\vec{F}$ și $\vec{N}$.

Observații

① Polul O se alege, de regulă, într-un punct prin care trec cât mai multe forțe deoarece momentele lor în raport cu el vor fi nule.

② Se recomandă alunecarea forțelor pe suport până când originea vectorilor forță va coincide cu punctul în care ele acționează, așa cum s-a procedat cu forța $\overline{F}$ în figura de mai jos.



Se descompun, după axele reperului, forțele care nu sunt paralele cu acestea, așa cum s-a procedat cu $\overline{F}$ și $\overline{N}$. Între F și F_x este unghiul β opus la vârf cu unghiul β inițial. Unghiul dintre $\overline{N}$ și $\overline{N_y}$ este α deoarece $\overline{N_y}$ este perpendiculară pe baza planului iar $\overline{N}$ este perpendiculară pe plan, deci cele două unghiuri α au laturile reciproc perpendiculare și, fiind ambele ascuțite, sunt egale.

Acum se pot scrie ecuațiile scalare de echilibru.

$Ox: \; H + F_x - N_x = 0$

$Oy: \; V - F_y - P - Q + N_y = 0$

$M_0: \; -F_y \cdot l - M - P \cdot 2l - Q\,3l + N_y \cdot 4l = 0$

Necunoscutele sunt H, V, N_x și N_y. Deoarece avem numai trei ecuații, trebuie să exprimăm componentele N_x și N_y în funcție de N și funcțiile trigonometrice ale unghiului α. Astfel vom avea trei necunoscute: H, V și N problema devenind static determinată (numărul de ecuații este egal cu numărul de necunoscute). F_x și F_y vor fi și ele exprimate în funcție de F și funcțiile trigonometrice ale unghiului β.

Forma finală a celor trei ecuații de echilibru este:

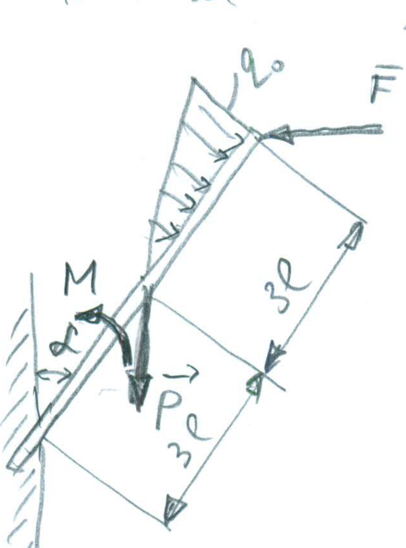
$H + F\cos\beta - N\sin\alpha = 0$

$V - F\sin\beta - P - Q + N\cos\alpha = 0$

$-F\sin\beta\, l - M - P \cdot 2l - Q \cdot 3l + N\cos\alpha \cdot 4l = 0$

Pentru rezolvare, se determină N din ecuația de momente și se înlocuiește în primele două de unde rezultă forțele V și H. Dacă vreuna rezultă cu semnul minus, înseamnă că au sens opus.

② Cunoscând că bara din desen este în echilibru, să se scrie ecuațiile scalare de echilibru.

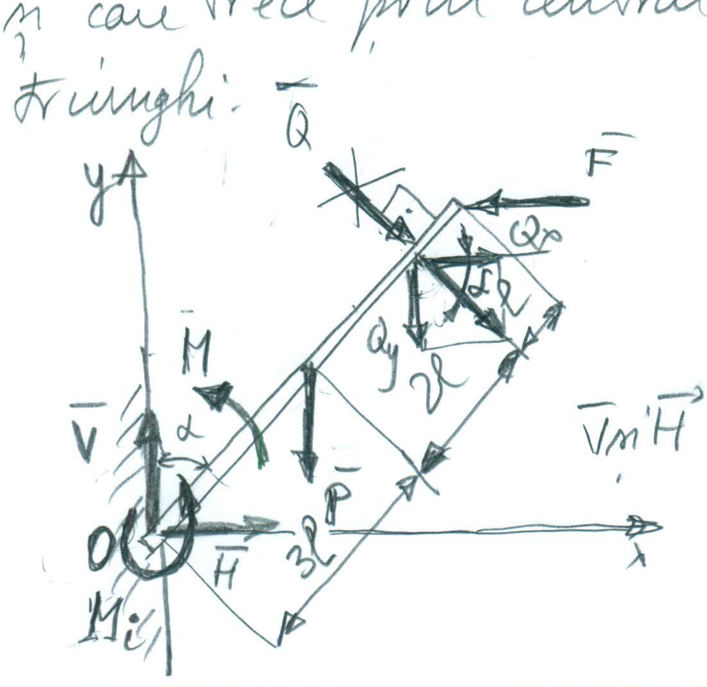


Bara este supusă la o legătură denumită încastrare. Aceasta se înlocuiește cu două forțe reciproc perpendiculare și cu un moment în încastrare, toate trei fiind necunoscute ale sistemului de ecuații de echilibru care va conține trei ecuații scalare.

Forța distribuită continuu sub formă triunghiulară se înlocuiește cu o rezultantă unică notată $\bar{Q}$ care are mărimea egală cu aria triunghiului cu săgeți

$$|\bar{Q}| = \frac{q_0 \cdot 3l}{2}$$

și care trece prin centrul de masă al aceluiași triunghi.



Deoarece forța F este orizontală iar forța de greutate $\bar{P}$ este verticală, vom alege cele două reacțiuni din încastrare după aceste direcții. Reperul va avea polul O în încastrare iar axele vor fi pe direcțiile verticală și orizontală, ca în desen. Încastrarea se mai înlocuiește, pe lângă cele două forțe $\bar{V}$ și $\bar{H}$ cu un moment în încastrare notat M_i, având sensul arbitrar la fel ca și sensul celor două forțe. Dacă după rezolvarea sistemului de ecuații de echilibru vreuna dintre necunoscutele V, H sau M_i va rezulta cu semnul minus, înseamnă că, în realitate are sens opus celui presupus inițial.

Forța $\bar{Q}$ se translează și se descompune după direcțiile axelor.

$$\vec{Q} = \vec{Q}_x + \vec{Q}_y = |\vec{Q}| \cos\alpha\, \vec{i} - |\vec{Q}| \sin\alpha\, \vec{j}$$

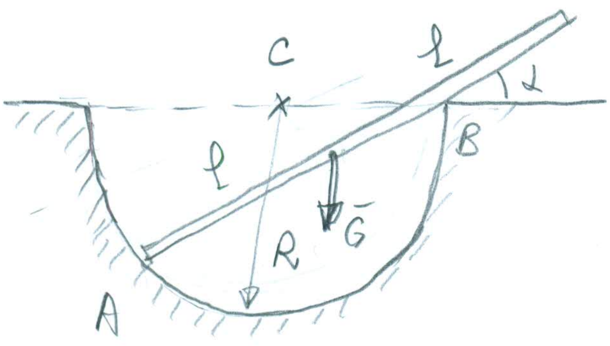
Se pot scrie acum cele trei ecuații scalare de echilibru

$$Ox: \; H + Q\cos\alpha - F = 0$$

$$Oy: \; V - P - Q\sin\alpha = 0$$

$$M_0: \; M_i - P\,3l\sin\alpha - Q\,5l + F\,6l\cos\alpha = 0$$

(3) O bară de lungime $2l$ și greutate $\vec{G}$ se sprijină pe un semicerc neted ca în figură. Să se determine mărimea unghiului α pentru care bara rămâne în echilibru atunci când bara este așezată în acea poziție

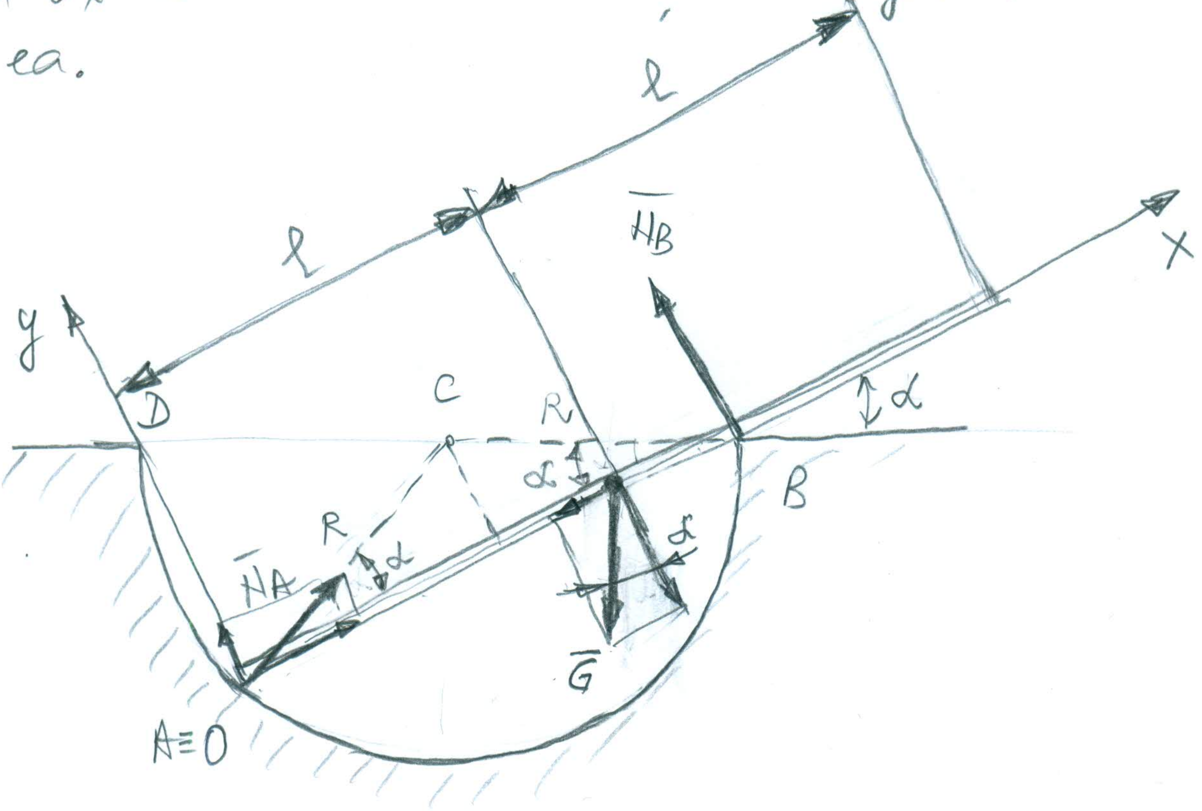


O primă condiție ca să existe o poziție de echilibru ca în figură este ca $2l > 2R$, adică $l > R$.

Bara se reazemă în punctele A și B. Reazemele se înlocuiesc cu câte o reacțiune normală.

Reacțiunea normală $\bar{N}_A$ este perpendiculară pe tangenta la cerc în punctul A (bara nu admite tangentă în punctul A) și este orientată în sensul desprinderii barei, adică spre centrul cercului, ea fiind coliniară cu raza cercului. Reacțiunea normală $\bar{N}_B$ este perpendiculară pe bară (suprafața de sprijin nu admite tangentă în punctul de sprijin) și are sensul în sensul desprinderii barei de reazem, adică în sus.

Diagrama de corp liber este arătată în figura următoare. Se alege un reper cu polul în punctul A, axa Ox coliniară cu bara și axa Oy perpendiculară pe ea.



Deoarece triunghiul OBD este dreptunghic în O, și el se înscrie în semicerc, atunci axa Oy va trece prin punctul D.

Se descompun forțele după direcțiile axelor reperului XOy

$$\overline{N_A} = N_A\cos\alpha\,\overline{i} + N_A\sin\alpha\,\overline{j}$$

$$\overline{G} = -G\sin\alpha\,\overline{i} - G\cos\alpha\,\overline{j}$$

$$\overline{N_B} = N_B\,\overline{j}$$

Ecuațiile scalare de echilibru sunt:

$Ox: \ N_A \cos\alpha - G\sin\alpha = 0$

$Oy: \ N_A \sin\alpha - G\cos\alpha + N_B = 0$

$M_0: \ -lG\cos\alpha + N_B \, 2R\cos\alpha = 0$

$Ox \Rightarrow \ N_A = G\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

$Oy \Rightarrow \ N_B = G\cos\alpha - N_A\sin\alpha = G\cos\alpha - G\dfrac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha} = G\dfrac{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}{\cos\alpha}$

$M_0 \Rightarrow -l\cancel{G}\cos\alpha + \cancel{G}\dfrac{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}{\cancel{\cos\alpha}}\, 2R\cancel{\cos\alpha} = 0$

Din ecuația de momente se poate afla unghiul α.

$-l\cos\alpha + 2R\cos^2\alpha - 2R\sin^2\alpha = 0$

Se înlocuiește $\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$ și rezultă

$-l\cos\alpha + 2R\cos^2\alpha - 2R(1-\cos^2\alpha) = 0$

$4R\cos^2\alpha - l\cos\alpha - 2R = 0$

$\cos\alpha_{1,2} = \dfrac{l \pm \sqrt{l^2 + 32R^2}}{8R}$. Soluția $\cos\alpha = \dfrac{l - \sqrt{l^2+32R^2}}{8R} < 0$

deci nu convine și rezultă:

$$\cos\alpha = \frac{l + \sqrt{l^2+32R^2}}{8R} > 0$$

Pe de altă parte $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$ deci $0 < \cos\alpha < 1$

$$\frac{\ell+\sqrt{\ell^2+32R^2}}{8R}<1 \qquad \ell+\sqrt{\ell^2+32R^2}<8R$$

$$\sqrt{\ell^2+32R^2}<8R-\ell$$

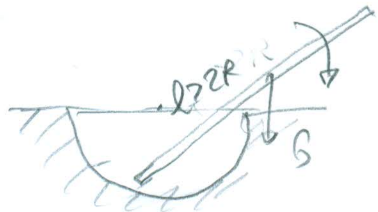
$$\cancel{\ell^2}+32R^2<64R^2-16R\ell+\cancel{\ell^2}$$

$$0<32R^{\cancel{2}}-16\cancel{R}\ell \qquad 0<32R-16\ell \qquad 0<16(2R-\ell)$$

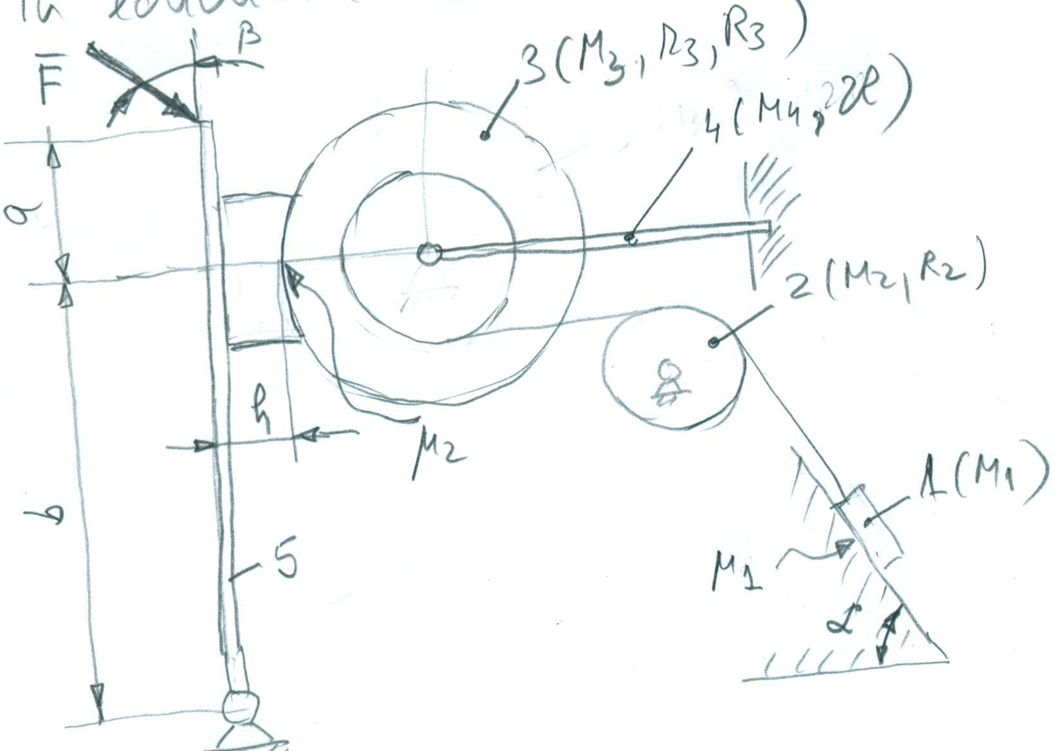
adică $2R-\ell>0$ $2R>\ell$.

Pe de altă parte $\ell>R$ deci

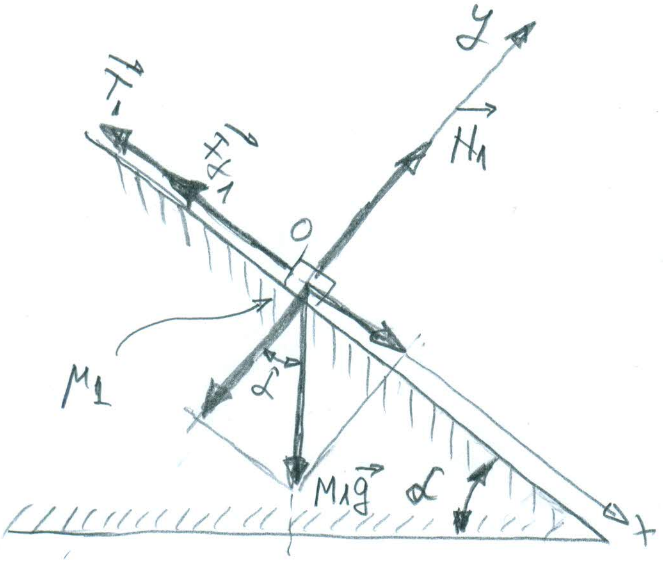
$$\boxed{R<\ell<2R}$$



(4) Se consideră sistemul de corpuri din desen aflat în echilibru. Să se determine mărimea forței F pentru care sistemul este în echilibru la limită și reacțiunile din legături.



Se folosește metoda izolării corpurilor. Mai întâi izolăm punctul material situat pe planul înclinat.



Se alege reperul cu o axă în lungul planului iar cealaltă perpendiculară pe plan. Se descompune greutatea $M_1\bar{g}$, unghiul α fiind între ea și normală. Ecuațiile de echilibru sunt

$$Ox: \quad M_1 g \sin\alpha - F_{f1} - T_1 = 0$$

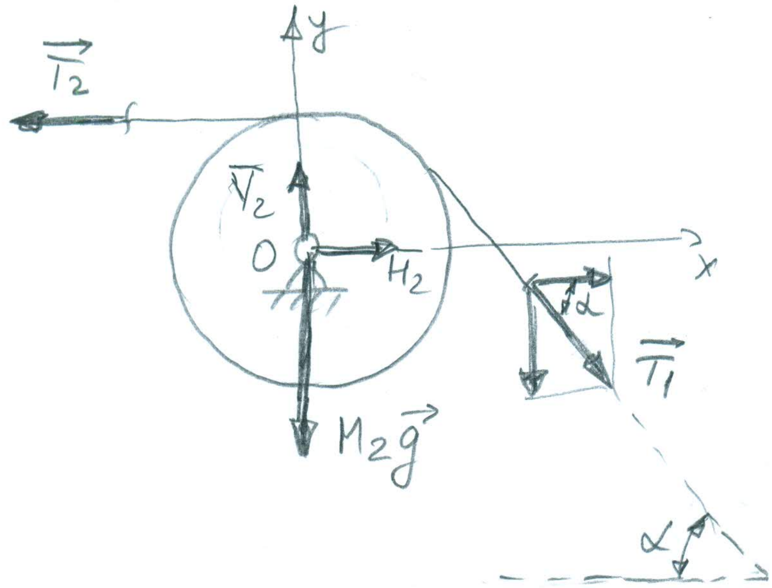
$$Oy: \quad N_1 - M_1 g \cos\alpha = 0$$

unde $\bar{T}_1$ este tensiunea din fir iar F_{f1} este forța de frecare. Deoarece frecarea este considerată la limită, $F_{f1} = \mu_1 N_1$. Ecuațiile se rescriu

$$M_1 g \sin\alpha - \mu_1 N_1 - T_1 = 0$$

$$N_1 - M_1 g \cos\alpha = 0$$

Izolăm al doilea corp.



Se alege un reper cu polul în centrul cercului. Se descompune tensiunea $\overline{T_1}$, unghiul dintre ea și orizontală fiind α (alterne interne - vezi desenul). Se notează cu $\overline{T_2}$ tensiunea din celălalt capăt al firului. În centrul discului este o articulație plană care se înlocuiește cu două forțe reciproc perpendiculare notate $\overline{H_2}$ și $\overline{V_2}$ care au sensul ales arbitrar. Tensiunile din fire au sensul în sensul întinderii firului.

Ecuațiile de echilibru sunt

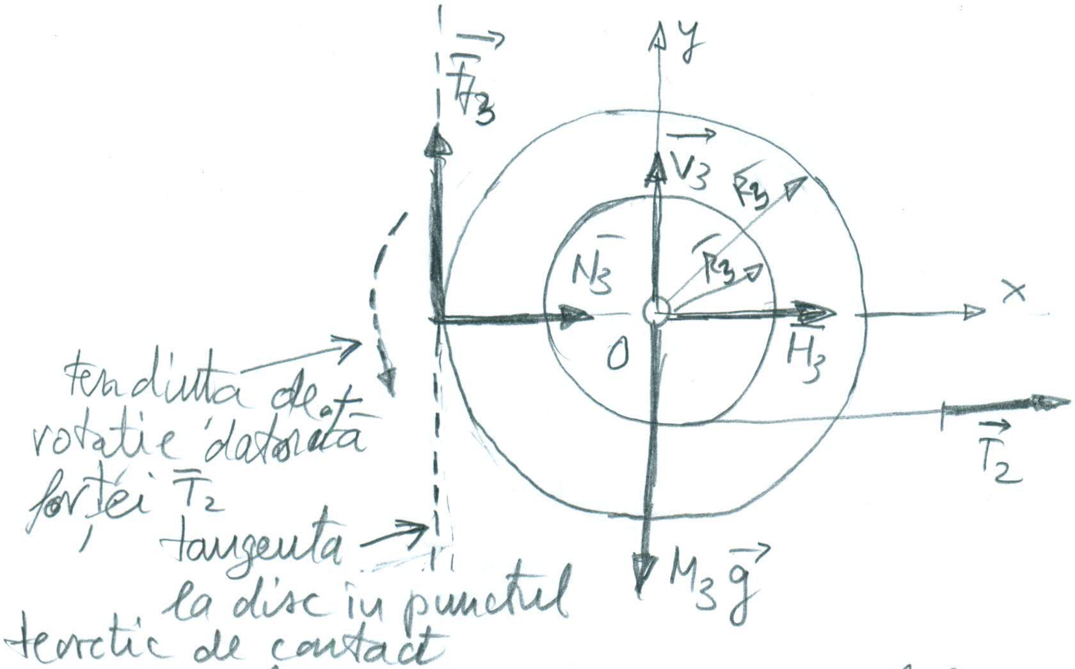
$Ox: \quad T_1\cos\alpha + H_2 - T_2 = 0$

$Oy: \quad V_2 - M_2 g - T_1\sin\alpha = 0$

$M_0 \quad T_2 R_2 - T_1 R_2 = 0$

observație: Tensiunea T_1 este egală și de sens opus cu cea de la primul corp și notată la fel.

Izolăm al treilea corp.



Se alege un reper cu polul în centrul troliului (acesta este numele corpului format din două discuri fixate împreună care formează astfel un singur corp). Se înlocuiește articulația cu două forțe reciproc perpendiculare $\vec{H_3}$ și $\vec{V_3}$ având sensurile alese arbitrar. Tensiunea $\overline{T_2}$ este egală și de sens opus cu cea de la corpul doi. Sensul tendinței de rotație al troliului, sub acțiunea tensiunii $\overline{T_2}$, este cel arătat de săgeata desenată cu linie întreruptă. Pentru a se opune acestei tendințe, forța de frecare are sensul arătat în desen (tinde să rotească corpul în sens opus celui în care tinde să-l rotească forța $\overline{T_2}$).

Între sabotul de frână de înălțime h și discul mare al troliului este un reazem. Reacțiunea normală $\bar{N}_3$ este perpendiculară pe tangenta la disc construită în punctul teoretic de contact și are sensul în sensul ipotetic ale desfacerii legăturii.

Ecuațiile de echilibru sunt

$$Ox: \quad N_3 + H_3 + T_2 = 0$$

$$Oy: \quad F_{f_3} + V_3 - M_3 g = 0$$

$$M_0: \quad -F_{f_3} R_3 + T_2 r_3 = 0$$

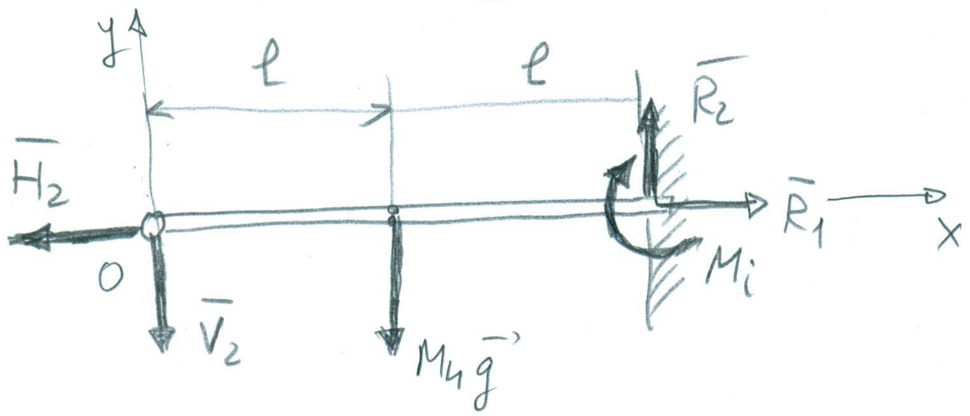
Deoarece echilibrul se consideră la limită, $F_{f_3} = \mu_2 N_3$, iar sistemul de ecuații de echilibru devine

$$N_3 + H_3 + T_2 = 0$$

$$\mu_2 N_3 + V_3 - M_3 g = 0$$

$$-\mu_2 N_3 R_3 + T_2 r_3 = 0$$

Se izolează acum corpul 4, care este o bară ce are în partea stângă o articulație iar în partea dreaptă este încastrată în zid. Diagrama de corp liber este reprezentată în figură.



Articulatia se inlocuieste cu forte egale si de sens opus cu cele din articulatia corpului anterior. Ele vor fi la fel notate. Încastrarea se înlocuieste cu două forte reciproc perpendiculare notate $\overline{R_1}$ si $\overline{R_2}$ care au directii si orientari arbitrare. S-au ales directiile orisontală si verticală iar sensurile au fost puse arbitrar. Pe lângă cele două forte, incastrarea se mai înlocuieste cu un moment concentrat $\overline{M_i}$ care are sensul arbitrar si se află în planul corpului. Se alege un reper cu polul acolo unde se intersectează mai multe forte. În ambele capete sunt câte două forte. S-a ales capătul din stânga pentru a avea corpul în zona pozitivă a axei Ox. Ecuatiile de echilibru sunt:

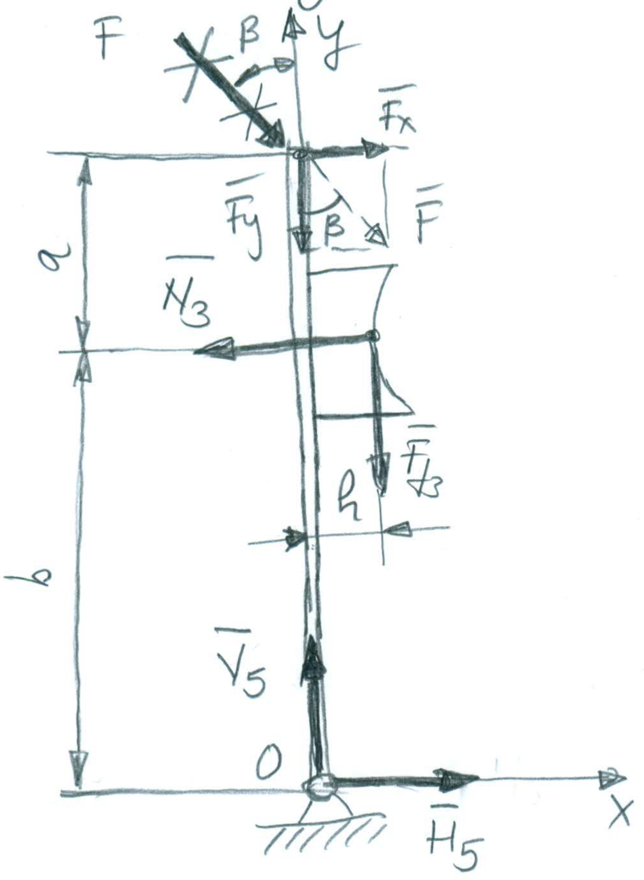
$$Ox: \; -H_2 + R_1 = 0$$

$$Oy: \; -V_2 - M_4 g + R_2 = 0$$

$$M_O: \; -M_4 g l - M_i + R_2 \cdot 2l = 0$$

Cele trei necunoscute $\bar{R}_1$, $\bar{R}_2$ și $\bar{M}_i$ pot fi aflate numai din aceste ecuații, ele nemaifiind prezente în alte ecuații de echilibru.

Izolăm corpul 5 format dintr-o pârghie de care este fixat un sabot. Diagrama de corp liber este prezentată în figură.



Articulația se înlocuiește cu două forțe reciproc perpendiculare $\vec{H}_5$ și $\vec{V}_5$. Reazemul dintre sabot și discul troliului se înlocuiește cu forțele $\vec{N}_3$ și $\bar{F}_{f3}$ egale și de sens opus cu cele ce acționează asupra troliului. Forța $\bar{F}$ se translează până ce originea vectorului ajunge în punctul de aplicație al ei (este desenată cu linie întreruptă) și apoi se descompune după direcțiile axelor reperului xOy ales cu polul O în articulație.

Ecuațiile de echilibru sunt:

$Ox: H_5 - N_3 + F_x = 0$

$Oy: V_5 - F_{f3} - F_y = 0$

$M_0: -F_{f3} \cdot h + N_3 \cdot b - F_x (a+b) = 0$

Deoarece se presupune că echilibrul este la limită $F_{f3} = \mu_2 N_3$. Brațul forței de frecare este h.

Din desen rezultă $F_x = F \sin\beta$ și $F_y = F \cos\beta$. Sistemul de ecuații se rescrie astfel

$Ox: H_5 - N_3 + F \sin\beta = 0$

$Oy: V_5 - \mu_2 N_3 - F \cos\beta = 0$

$M_0: -\mu_2 N_3 h + N_3 b - F \sin\beta (a+b) = 0$

Sistemul de ecuații scrise pentru toate corpurile sistemului conține 14 ecuații și are 14 necunoscute ($N_1, T_1, H_2, V_2, T_2, H_3, V_3, N_3, R_1, R_2, M_i, H_5, V_5, F$) deci este static determinat.

Rezolvarea sistemului de 14 ecuații se începe cu cele de la primul corp și se continuă până la cel din urmă, când se determină și mărimea forței F. Se obține soluția:

$$N_1 = M_1 g \cos\alpha$$

$$T_1 = M_1 g (\sin\alpha - \mu_1 \cos\alpha)$$

$$T_2 = T_1 = M_1 g (\sin\alpha - \mu_1 \cos\alpha)$$

$$H_2 = M_1 g (\sin\alpha - \mu_1 \cos\alpha)(1 - \cos\alpha)$$

$$V_2 = M_2 g + M_1 g (\sin\alpha - \mu_1 \cos\alpha) \sin\alpha$$

$$N_3 = \frac{r_3}{\mu_2 R_3} M_1 g (\sin\alpha - \mu_1 \cos\alpha)$$

$$V_3 = M_3 g - \frac{r_3}{R_3} M_1 g (\sin\alpha - \mu_1 \cos\alpha)$$

$$H_3 = -\left(\frac{r_3}{\mu_2 R_3} + 1\right) M_1 g (\sin\alpha - \mu_1 \cos\alpha)$$

$$R_1 = M_1 g (\sin\alpha - \mu_1 \cos\alpha)(1 - \cos\alpha)$$

$$R_2 = M_4 g + M_2 g + M_1 g (\sin\alpha - \mu_1 \cos\alpha) \sin\alpha$$

$$M_i = [M_4 g + M_2 g + M_1 g (\sin\alpha - \mu_1 \cos\alpha) \sin\alpha]\, l$$

$$F = \frac{r_3 (b - \mu_2 h)}{(a+b) \sin\beta} \cdot M_1 g (\sin\alpha$$

$$H_5 = N_3 - F \sin\beta$$

$$V_5 = \mu_2 N_3 + F \cos\beta$$