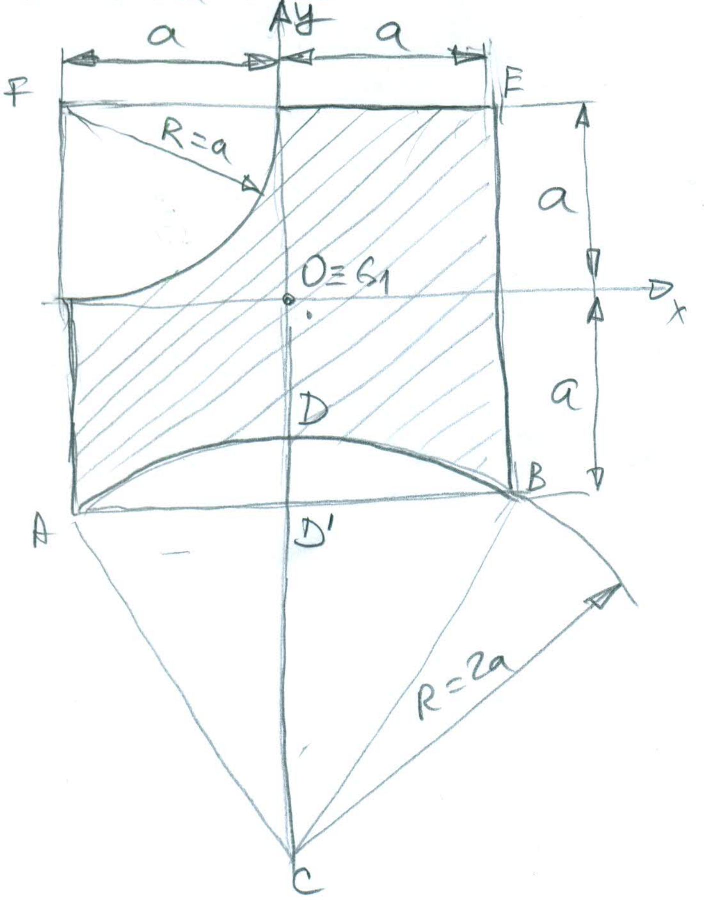
Seminarul nr. 6 (1)

Se consideră placa plană omogenă din desen la care se cere să se calculeze coordonatele centrului de masă.



Pentru a determina centrul de masă al plăcii se determină, mai întâi, zonele simple. Acestea sunt:

① Pătratul de latură 2a ⇒

② Sfertul de cerc de rază a ⇒

③ Un triunghi ABC care se adaugă fictiv ca și cum ar fi cu material ⇒

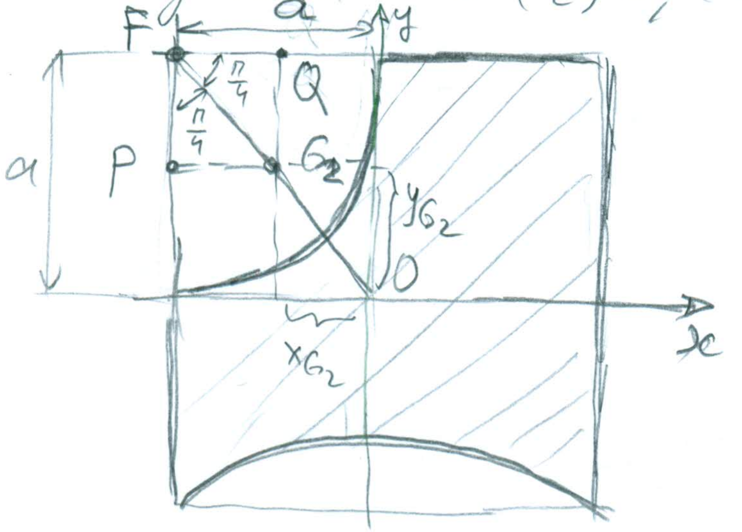
④ Un sector de cerc CBDA care se scoate ⇒

Zona 1 – pătratul ABEF considerat plin. Centrul de masă G_1 coincide cu punctul O, deci

$x_{G_1} = 0 \quad y_{G_1} = 0 \quad A_1 = 4a^2$.

Zona 2 Sfertul de cerc de rază a.

Centrul său de masă G_2 se află pe bisectoarea unghiului de $90°.(\frac{\pi}{2})$ așa cum se arată în desen.



Se poate calcula segmentul

$$FG_2 = \frac{2}{3}\frac{a\sin\frac{\pi}{4}}{\frac{\pi}{4}} = \frac{2}{3}\frac{a\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\pi}{4}} = \frac{4a\sqrt{2}}{3\pi}$$

Segmentele FQ și FP sunt egale cu

$$FP = FQ = FG_2\cos\frac{\pi}{4} = \frac{4a\sqrt{2}}{3\pi}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{4a}{3\pi}$$

Coordonata $x_{G_2} = -(a - FQ) = -(a - \frac{4a}{3\pi}) = \frac{4a}{3\pi} - a$

Coordonata $y_{G_2} = a - FP = a - \frac{4a}{3\pi}$

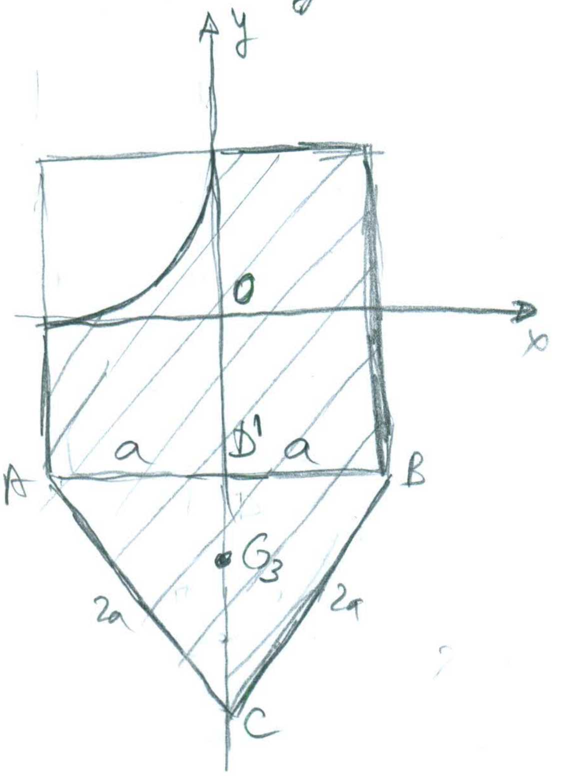
Aria sfertului de cerc este $A_2 = \frac{1}{4}(\pi . a^2) = \frac{\pi a^2}{4}$

Zona 3

Zona a treia este un triunghi ABC.

El nu există în realitate dar îl adăugăm în mod fictiv. Facem acest lucru pentru că, atunci când vom scădea zona 4 care este sectorul de cerc CBDA (al cărei centru de masă știm să îl calculăm) vom scădea triunghiul ABC dar și segmentul de cerc AD'BD (al cărui centru de masă nu îl putem calcula ușor).

Triunghiul ABC este echilateral, laturile sale având lungimea 2a. Centrul de masă se află pe axa Oy, deci avem:



$x_{G_3} = 0.$

Coordonata y_{G_3} este

$y_{G_3} = -OG_3 = -(OD' + D'G_3)$

$OD' = a$

$D'G_3 = \frac{1}{3} D'G = \frac{1}{3} a\sqrt{3}$

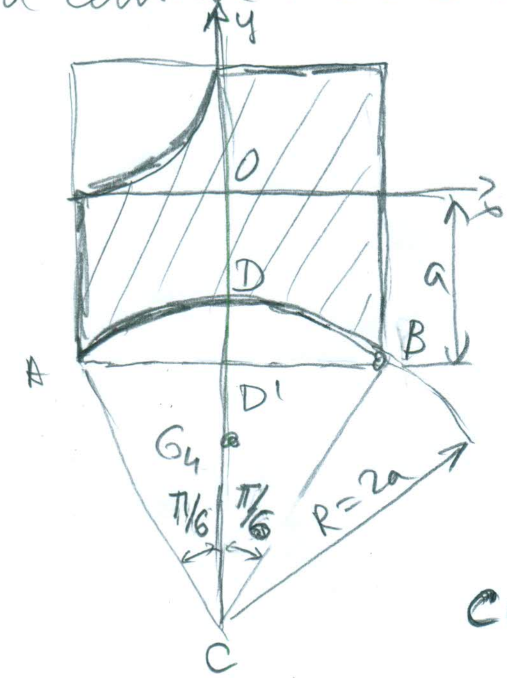
Deci

$y_{G_3} = -\left(a + \frac{a\sqrt{3}}{3}\right)$

Aria triunghiului ABC este $A_3 = \frac{AB \cdot D'C}{2} = \frac{2a \cdot a\sqrt{3}}{2} = a^2\sqrt{3}$

Zona 4

Această zonă este un sector de cerc care are în centrul său C unghiul de 60° $\left(\frac{\pi}{3}\right)$. Ea se va scădea din suprafața anterioară, deci aria ei va fi cu semnul minus.



Centrul de masă G_4 se află pe axa Oy deci

$x_{G_4} = 0$

Putem calcula segmentul CG_4:

$CG_4 = \frac{2}{3} \cdot \frac{2a \sin\frac{\pi}{6}}{\frac{\pi}{6}} = \frac{4a}{\pi} \cdot \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{4a}{\pi}$

Coordonata $y_{G_4} = -OG_4 = -(OC - CG_4) = -\left(a + a\sqrt{3} - \frac{4a}{\pi}\right)$

Aria sectorului de cerc se determină pe baza faptului că aceasta este o parte din aria cercului proporțională cu unghiul sectorului de cerc raportat la 2π. Astfel avem

$$\frac{\frac{\pi}{3}}{2\pi} = \frac{A_3}{\text{Aria cercului}} = \frac{A_3}{\pi(2a)^2}$$

Rezultă că $A_3 = \frac{\cancel{\pi}(2a)^2\frac{\pi}{3}}{2\cancel{\pi}} = \frac{{}^{2}\cancel{4}a^2\pi}{\cancel{2}\cdot 3} = \frac{2a^2\pi}{3}$

Acum se poate construi tabelul

Nr. crt.	x_{Gi}	y_{Gi}	A_i	$x_{Gi}\cdot A_i$	$y_{Gi}\cdot A_i$
1	0	0	$4a^2$	0	0
2 (−)	$\frac{4a}{3\pi}-a$	$a-\frac{4a}{3\pi}$	$-\frac{\pi a^2}{4}$	$-\left(\frac{4a}{3\pi}-a\right)\frac{\pi a^2}{4}$	$-\left(a-\frac{4a}{3\pi}\right)\cdot\frac{\pi a^2}{4}$
3	0	$-\left(a+\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)$	$a^2\sqrt{3}$	0	$-\left(a+\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)a^2\sqrt{3}$
4. (−)	0	$-\left(a+a\sqrt{3}-\frac{4a}{\pi}\right)$	$-\frac{2a^2\pi}{3}$	0	$+\left(a+a\sqrt{3}-\frac{4a}{\pi}\right)\frac{2a^2}{3}\pi$
Σ			$\left(4+\sqrt{3}-\frac{11\pi}{12}\right)a^2$	$\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{3}\right)a^3$	$\left[\left(\frac{5}{12}+\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)\pi-\frac{10+3\sqrt{3}}{3}\right]a^3$

Coordonatele centrului de masă G al plăcii sunt

$$x_G = \frac{\sum_{i=1}^{4} x_{G_i} A_i}{\sum_{i=1}^{4} A_i} = \frac{x_{G_1}A_1 + x_{G_2}A_2 + x_{G_3}A_3 + x_{G_4}A_4}{A_1+A_2+A_3+A_4} = \frac{\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{3}\right)a^3}{\left(4+\sqrt{3}-\frac{11\pi}{12}\right)a^2} =$$

$$= \frac{0{,}452}{2{,}852}\,a \approx 0{,}158a$$

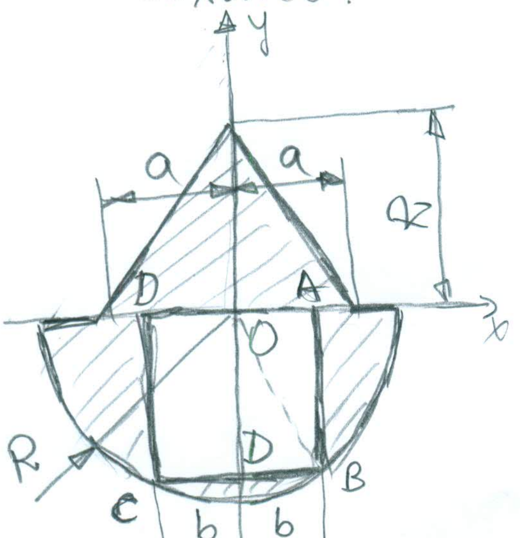
$$y_G = \frac{\sum_{i=1}^{4} y_{G_i} A_i}{\sum_{i=1}^{4} A_i} = \frac{y_{G_1}A_1 + y_{G_2}A_2 + y_{G_3}A_3 + y_{G_4}A_4}{A_1+A_2+A_3+A_4} = \frac{\left[\left(\frac{5}{12}+\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)\pi - \frac{10+3\sqrt{3}}{3}\right]a^3}{\left(4+\sqrt{3}-\frac{11\pi}{12}\right)a^2} =$$

$$= \frac{-0{,}128}{2{,}852}\,a = -0{,}045a$$

2. Se consideră placa plană omogenă din desen având dimensiunile a și b variabile. Să se determine mărimea dimensiunilor a și b astfel încât să fie îndeplinite simultan condițiile

a). Centrul de masă al plăcii să fie în punctul O

b) Aria dreptunghiului care se decupează să fie maximă.



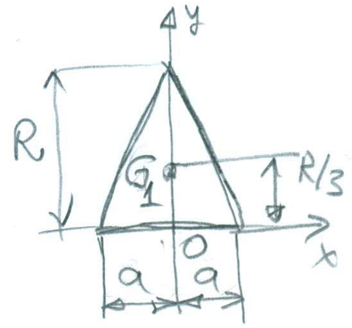
Deoarece corpul are ca axă de simetrie axa Oy, rezultă că centrul de masă G se află pe această axă. Prin urmare rezultă că coordonata x_G este zero și trebuie calculată numai coordonata y_G.

Corpul se împarte în trei zone:

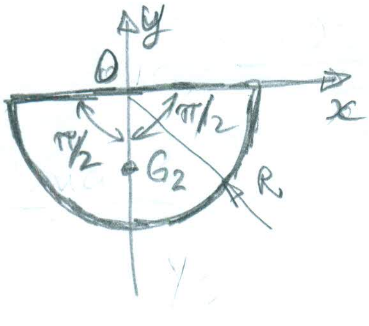
1. Zona 1 este triunghiul isoscel de înălțime R și bază 2a.
2. Zona 2 este semicercul de rază R
3. Zona 3 este dreptunghiul care are o latură 2b. Cealaltă latură se determină din triunghiul dreptunghic OAB în care OB=R este ipotenuză. Rezultă din teorema lui Pitagora că cealaltă latură $AB=\sqrt{OB^2-BD^2}=\sqrt{R^2-b^2}$. $(AB=CD=OD)$

Zona 1

$$y_{G_1}=\frac{R}{3} \qquad A_1=\frac{(2a)R}{2}=Ra$$



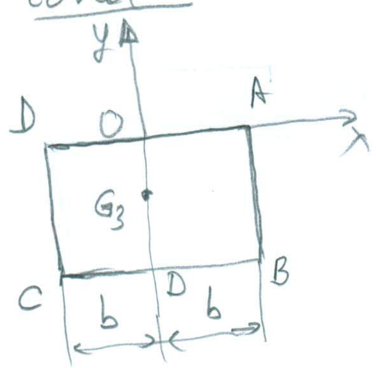
Zona 2



$$OG_2=\frac{2}{3}R\frac{\sin\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}}=\frac{4R}{3\pi}$$

$$y_{G_2}=-OG_2=-\frac{4R}{3\pi} \qquad A_2=\frac{\pi R^2}{2}$$

Zona 3



$$y_{G_3}=-\frac{OD}{2}=-\frac{\sqrt{R^2-b^2}}{2}$$

$$A_3=CB\cdot AB=2b\sqrt{R^2-b^2}$$

Coordonata y_G a centrului de masă este

$$y_G = \frac{y_{G_1}A_1 + y_{G_2}A_2 + y_{G_3}A_3}{A_1 + A_2 + A_3} = \frac{\frac{R}{3}Ra + \left(-\frac{4R}{3\pi}\right)\frac{\pi R^2}{2} + \left(-\frac{\sqrt{R^2-b^2}}{2}\right)\left(-2b\sqrt{R^2-b^2}\right)}{Ra + \frac{\pi R^2}{2} - 2b\sqrt{R^2-b^2}} =$$

$$= \frac{\frac{aR^2}{3} - \frac{2}{3}R^3 + b(R^2-b^2)}{aR + \frac{\pi R^2}{2} - 2b\sqrt{R^2-b^2}}$$

Pentru ca centrul de masă al plăcii să fie în punctul O, trebuie ca $x_G = 0$ și $y_G = 0$. Cum x_G este zero din motive de simetrie, înseamnă că mai trebuie impusă condiția $y_G = 0$, adică

$$aR^2 - 2R^3 + 3b(R^2 - b^2) = 0$$

Din această ecuație nu putem afla cele două necunoscute a și b. Ne mai trebuie o ecuație care se obține din condiția ca aria dreptunghiului care se scoate să fie maximă. Aria dreptunghiului este

$$A_3 = 2b\sqrt{R^2-b^2}$$

Pentru a afla mărimea lui b pentru care A_3 este maximă, se calculează derivata

$$\frac{dA_3}{db} = 2\sqrt{R^2-b^2} + 2b\frac{1}{2\sqrt{R^2-b^2}}\cdot(-2b) =$$

$$= \frac{2(R^2-b^2) - 2b^2}{\sqrt{R^2-b^2}} = \frac{2R^2 - 4b^2}{\sqrt{R^2-b^2}}$$

Pentru a determina punctele de extrem se calculează rădăcinile derivatei:

$$\frac{dA_3}{db}=0 \Rightarrow 2R^2-4b^2=0 \Rightarrow b^2=\frac{R^2}{2} \Rightarrow b=\pm\frac{R}{\sqrt{2}}=\pm\frac{R\sqrt{2}}{2}$$

Din punct de vedere fizic, este acceptabilă numai rădăcina pozitivă deoarece b este o lungime. Din analiza semnului derivatei care este o funcție de gradul doi, între rădăcini are semnul + iar în exterior semnul – deci funcția crește la stânga lui $b=\frac{R\sqrt{2}}{2}$ și scade la dreapta ceea ce arată că această rădăcină este un punct de maxim.

Mărimea variabilei a se obține din condiția $y_G=0$ scrisă anterior în care $b=\frac{R\sqrt{2}}{2}$.

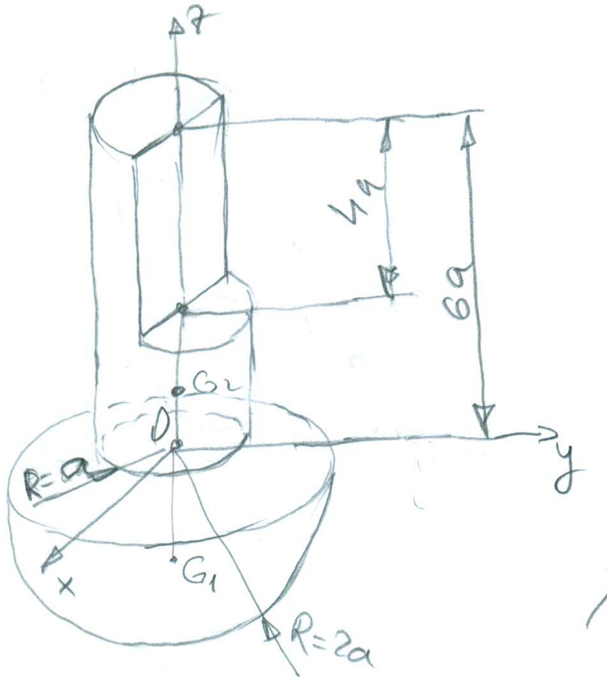
Se obține ecuația

$$aR^2-2R^3+3\cdot\frac{R\sqrt{2}}{2}\left(R^2-\frac{R^2}{2}\right)=0$$

$$a\cancel{R^2}-2R^{\cancel{3}}+\frac{3\sqrt{2}}{4}R^{\cancel{3}}=0$$

$$a=2R-\frac{3\sqrt{2}}{4}R \Rightarrow a=\frac{8-3\sqrt{2}}{4}R$$

Să se calculese coordonatele centrului de masă al corpului omogen din desen.



Corpul se împarte în trei zone

1. O emisferă de rază $R=2a$
2. Un cilindru circular drept de rază $R=a$ și înălțime $2a$.
3. Un semicilindru de rază $R=a$ și înălțime $4a$.

Corpul are un plan de simetrie și anume yOz. Prin urmare, centrul de masă G se află în acest plan iar $x_G=0$.

Zona 1 Emisfera are centrul de masă G_1 și este poziționat pe axa Oz la distanța $\frac{3}{8}R$.
Avem deci

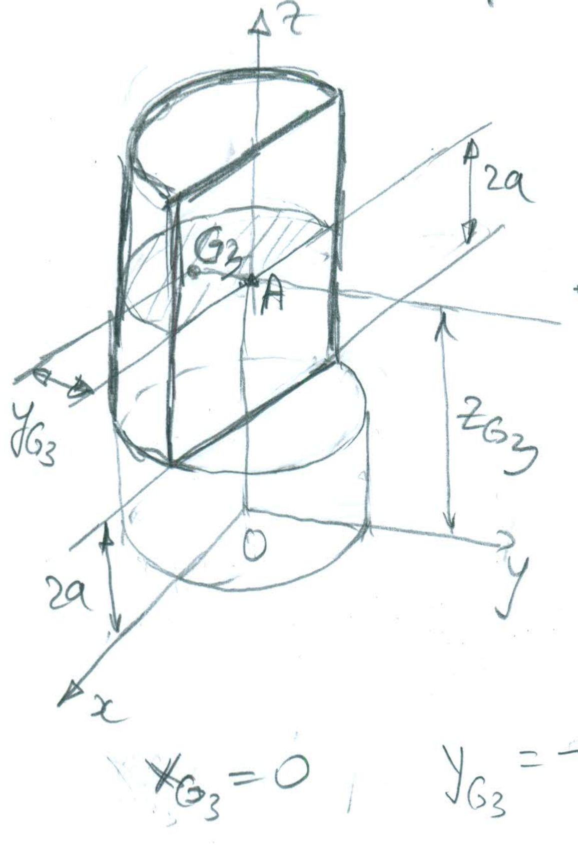
$$x_{G_1}=0 \quad y_{G_1}=0 \quad z_{G_1}=-\frac{3}{8}R=-\frac{3}{8}\cdot 2a=-\frac{3}{4}a$$

$$V_1=\frac{1}{2}\underbrace{\left(\frac{4}{3}\pi R^3\right)}_{\text{volumul sferei}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\pi\cdot 8a^3=\frac{16}{3}\pi a^3$$

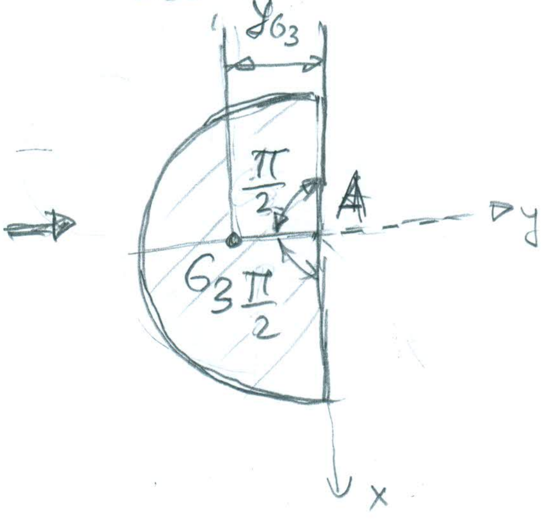
Zona 2 Cilindrul are centrul de masă G_2 tot pe axa Oz situat la jumătatea înălțimii. Avem deci

$$x_{G_2}=0 \quad y_{G_2}=0 \quad z_{G_2}=a \quad V_2=\underbrace{\pi R^2 h}_{\text{vol. cilindru}}=\pi\cdot a^2\cdot 2a=2\pi a^3.$$

<u>Zona 3</u> Semicilindrul se încadrează în categoria corpurilor cilindrice şi prismatice drepte. Centrul său de masă coincide cu centrul de masă al secţiunii mediane considerată ca placă plană omogenă.



secţiunea mediană



$$x_{G_3}=0 \qquad y_{G_3} = -AG_3 = -\frac{2}{3}\,\frac{a\sin\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}} = -\frac{4a}{3\pi}$$

$$z_{G_3}=4a \qquad V=\frac{1}{2}\big(\underbrace{\pi R^2 h}_{\text{vol. cilindru}}\big) = \frac{1}{2}\pi a^2 4a = 2\pi a^3$$

Se face tabelul fără coordonata x, deoarece $x_G=0$

Nr. crt.	y_{G_i}	z_{G_i}	V_i	$y_{G_i} V_i$	$z_{G_i} V_i$
1.	0	$-\frac{3}{4}a$	$\frac{16}{3}\pi a^3$	0	$-4\pi a^4$
2	0	a	$2\pi a^3$	0	$2\pi a^4$
3	$-\frac{4a}{3\pi}$	$4a$	$2\pi a^3$	$-\frac{8}{3}a^4$	$8\pi a^4$
$\sum$			$\frac{28}{3}\pi a^3$	$-\frac{8}{3}a^4$	$6\pi a^4$

Coordonatele centrului de masă al corpului sunt $x_G = 0$

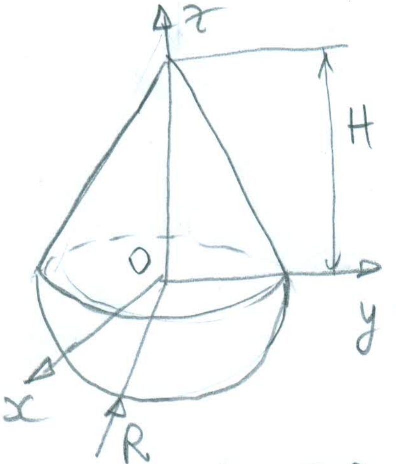
$$y_G = \frac{\sum_{i=1}^{3} y_{G_i} V_i}{\sum_{i=1}^{3} V_i} = \frac{y_{G_1}V_1 + y_{G_2}V_2 + y_{G_3}V_3}{V_1+V_2+V_3} = \frac{-\frac{8}{3}a^4}{\frac{28}{3}\pi a^3} =$$

$$= -\frac{2}{7\pi}a \simeq -0{,}09a$$

$$z_G = \frac{\sum_{i=1}^{3} z_{G_i} V_i}{\sum_{i=1}^{3} V_i} = \frac{z_{G_1}V_1 + z_{G_2}V_2 + z_{G_3}V_3}{V_1+V_2+V_3} = \frac{6\pi a^4}{\frac{28}{3}\pi a^3} = \frac{9}{14}a \simeq 0{,}64a$$

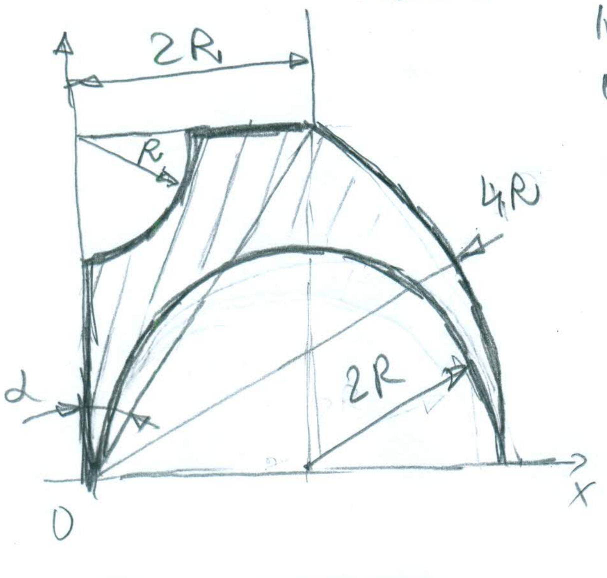
Probleme propuse

① Se consideră corpul omogen din desen format dintr-un con circular drept și o emisferă având bazele comune. Să se determine înălțimea H a conului astfel încât centrul de masă al corpului să fie în punctul O



Indicație: centrul de masă al conului se află la distanța $\frac{H}{4}$ față de bază. Volumul conului este $\frac{\pi R^2 H}{3}$.

② Să se determine centrul de masă al plăcii plane omogene din desen.



Indicație: Placa are 4 zone: un triunghi dreptunghic, și un sector de cerc din care se scad un sfert de cerc și un semicerc.

Aflați mai întâi unghiul α.