STUDIUL VIBRAŢIILOR LINIARE ALE SISTEMELOR OSCILATORII CU UN SINGUR GRAD DE LIBERTATE

VM 1

1. Scopul şi conţinutul lucrării

◆ Cunoaşterea principalelor noţiuni teoretice asupra sistemelor vibratoare liniare cu un singur grad de libertate;
◆ Cunoaşterea modului de vibraţie a sistemelor liniare cu un grad de libertate, în mişcare oscilatorie liberă neamortizată;
◆ Familiarizarea studentului cu aparatura necesară controlului, măsurării şi înregistrării vibraţiilor.

2. Consideraţii generale

Un sistem mecanic vibrant are un singur grad de libertate dacă mişcarea sa se poate studia cu ajutorul unui singur parametru scalar, numit *coordonata* sau *parametrul vibraţiei*; aceasta poate fi lungime, unghi etc. În figura 1.1. sunt prezentate modelele mecanice ale sistemelor vibrante cu un singur grad de libertate, funcţionând în domeniul elastic, cunoscute sub termenul de "*oscilator liniar*":
• în sistem de vibraţii de translaţie (longitudinale), studiate cu coordonata x (fig.1.1a);
• în sistem de vibraţii de torsiune (răsucire), studiate cu unghiul de rotaţie φ (fig.1.1b);
• în sistem de vibraţii de încovoiere, studiate cu coordonata x (fig.1.1c).

2.1. Ecuaţia diferenţială generală a vibraţiilor de translaţie în sistemele cu un grad de libertate.

Fie oscilatorul liniar din fig.1.1a scos din poziţia de echilibru static prin aplicarea sau prin suprimarea bruscă a unei forţe. Asupra masei m, ce execută astfel vibraţii

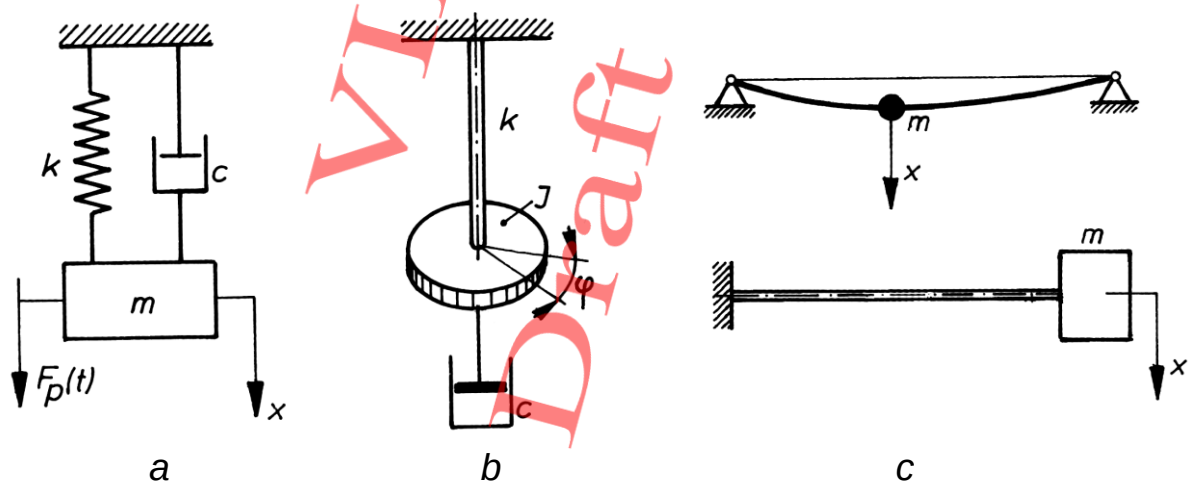

Fig.1.1. Modele mecanice ale sistemelor vibrante cu un singur grad de libertate: (*a*) sistemul oscilator longitudinal; (*b*) – sistemul oscilator torsional; (*c*) – sistemul oscilator încovoietor

VIBRANI Draft student

longitudinale, pot acţiona mai multe forţe:

◆ ***forţa elastică F_e***, ce ia naştere în arc, va tinde să aducă sistemul în poziţia de echilibru static (starea de referinţă):

$$F_e = -k \cdot x \tag{1.1}$$

Semnul – indică sensul forţei, opus mişcării. Coeficientul de proporţionalitate k se numeşte *constantă elastică*. Vibraţiile efectuate numai sub acţiunea forţelor elastice se numesc *vibraţii libere fără amortizare*;

◆ ***forţa de rezistenţă*** sau ***de amortizare F_r***, se opune mişcării şi apare datorită frecărilor exterioare ale mobilului (cu particulele de aer sau de lichid, ori direct cu alte corpuri solide), cât şi datorită frecării interioare între particulele componente ale elementului elastic. Forţele de amortizare se opun deplasărilor, deci sunt de semn contrar cu vitezele punctelor sistemelor vibrante.

$$F_r = -(sign\dot{x})R \tag{1.2}$$

unde:

$$sign\dot{x} = \begin{cases} +1 \ldots. pentru\ \dot{x} \geq 0 \\ -1 \ldots. pentru\ \dot{x} \leq 0 \end{cases} \tag{1.3}$$

Forţa de amortizare poate fi:

• <u>constantă</u> (nu depinde de viteză), în cazul *frecării uscate*, când R = constant:

$$F_{r_u} = -(sign\dot{x})R \tag{1.4}$$

• <u>proporţională cu viteza</u>, în cazul *frecării vâscoase*:

$$F_{r_v} = -cv = -c\dot{x} \tag{1.5}$$

Factorul de proporţionalitate c se numeşte *coeficient de amortizare*. Amortizarea vâscoasă s-a sugerat în fig.1.1 printr-un piston.

• <u>variabilă neliniar cu viteza:</u>

$$F_{r_n} = -c_1 v^n \quad (n > 1) \tag{1.6}$$

Când forţele de amortizare au valori mari ce nu pot fi neglijate, vibraţiile sunt *amortizate*.

◆ **forţa perturbatoare $F_p(t)$**, scoate corpul din poziţia de echilibru şi întreţine mişcarea.

Mişcările vibratorii produse în prezenţa acestor forţe se numesc *vibraţii forţate*. Forţa perturbatoare, periodică, se scrie în general cu ajutorul componentelor armonice de forma:

$$F_p(t) = F_0 \cdot \sin(\omega t + \varphi) \tag{1.7}$$

obţinută prin dezvoltarea forţei în serie Fourier.

Prin scrierea legii fundamentale a dinamicii, proiectată pe direcţia deplasării şi luând în consideraţie acţiunea forţei elastice, a forţelor de amortizare uscată şi vâscoasă, cât şi a forţei perturbatoare, se obţine *ecuaţia diferenţială generală a vibraţiilor de translaţie în sistemele cu un singur grad de libertate*:

VIBRAŢII Draft • Student

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = -(sign\dot{x})R + F_p(t) \tag{1.8}$$

Ecuaţia diferenţială este liniară dacă forţa de rezistenţă uscată nu există; dacă se ia însă în considerare această forţă (vezi rel. 1.4), ecuaţia este liniară numai pe intervalele de timp pe care viteza nu-şi schimbă semnul.

Analog cu ecuaţia (1.8), scrisă pentru vibraţii de translaţie, *ecuaţia diferenţială generală a vibraţiilor liniare de torsiune* este

$$J\ddot{\varphi} + c\dot{\varphi} + kx = -(sign\dot{\varphi})M + M_p(t) \tag{1.9}$$

în care: J – momentul de inerţie a barei la torsiune; c – coeficientul de amortizare vâscoasă la torsiune; k – constanta elastică la torsiune.

2.2. Constanta elastică a arcului elicoidal supus oscilaţiilor longitudinale

Aşa cum a fost deja studiat în cadrul disciplinelor „Rezistenţa materialelor” şi „0rgane de maşini”, calculul arcurilor elicoidale au ca punct de plecare teoria solicitărilor simple din bare.

Astfel, la un arc cilindric elicoidal, construit dintr-o sârmă cu secţiune circulară (fig.1.2), sub acţiunea unei forţe F, se produce o săgeată statică:

$$x_{st} = \frac{\pi D^3 n}{4GI_p} F \tag{1.10}$$

în care: D – diametrul mediu al arcului; n – numărul de spire active; G – modulul de elasticitate transversal al materialului din care este confecţionat arcul; I – momentul de inerţie polar al secţiunii spirei:

$$I_p = \frac{\pi d^4}{32} \tag{1.11}$$

cu: d – diametrul spirei.

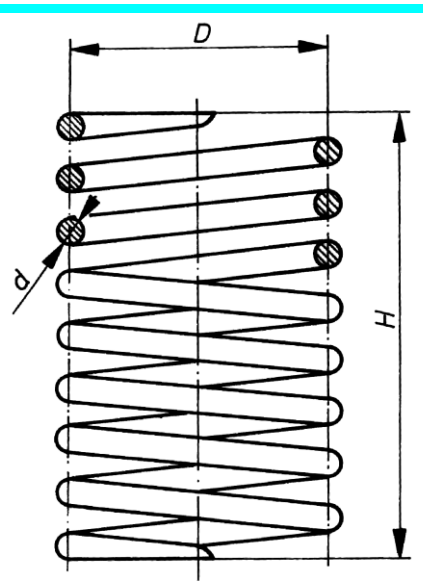

Fig.1.2. Parametrii resortului

Conform definiţiei constantei elastice k (forţa ce produce o deformaţie egală cu unitatea), cu ajutorul relaţiilor (1.10) şi (1.11) se deduce:

$$k = \frac{F}{x_{st}} = \frac{4GI_p}{\pi D^3 n} = \frac{Gd^4}{8D^3 n} \tag{1.12}$$

3. Materiale şi aparatura necesară

Pentru desfăşurarea lucrării practice sunt necesare următoarele (fig.1.3):

- arc elicoidal şi dispozitiv de fixare a acestuia;
- piese de diferite greutăţi;
- traductori inductivi;
- punte tensometrică;

VIBRAŢII ◆ Student Draft

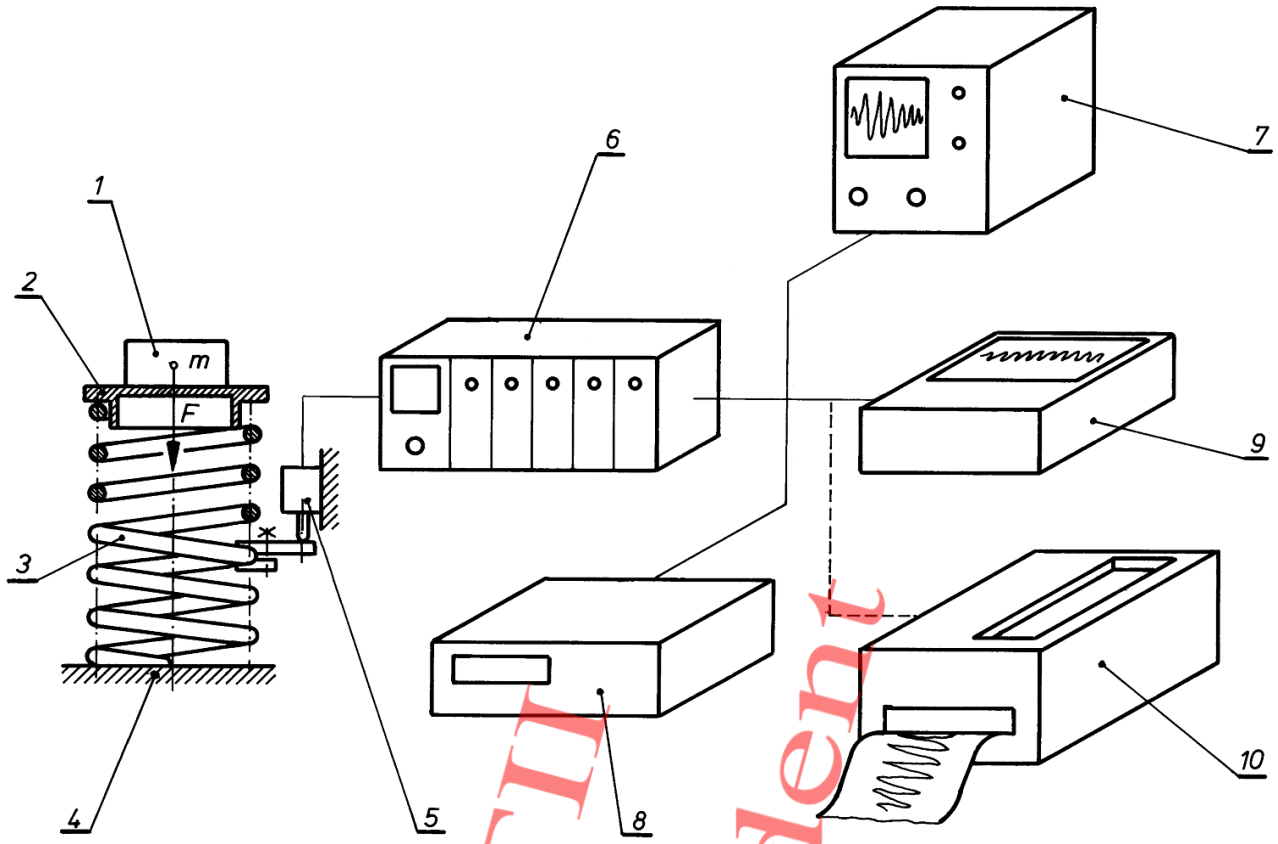

Fig.1.3. Echipamentul pentru vizualizarea şi înregistrarea vibrogramei:
1 – masă concentrată; *2* – disc intermediar; *3* – resort; *4* – placă de bază; *5* – traductor inductiv; *6* – amplificator tensometric; *7* – osciloscop; *8* – frecvenţmetru electronic; *9* – inscriptor *XY*; *10* – oscilograf

- aparatură pentru înregistrarea şi prelucrarea semnalelor;
- dinamometru mecanic;
- comparator cu cadran.

4. Metodologia desfăşurării lucrării practice

Prin imprimarea unui impuls masei concentrate *1* de greutate $F = mg$ (vezi fig.1.3), aşezată prin intermediul unui disc *2* pe arcul cilindric elicoidal *3*, fixat rigid pe placa de bază *4*, partea superioară a resortului intră în oscilaţie. Mişcarea vibratorie este preluată de traductorul inductiv *5* (de tip TCI 14.1), care are carcasa rigidizată de placa de bază *4*, iar miezul bobinei prins de una din spirele arcului. Semnalul cules de traductorul *5* este amplificat de un amplificator tensometric *6* (de tip N 2302) şi vizualizat pe un osciloscop *7* (model E0102). Frecvenţa mişcării vibratorii poate fi citită direct pe frecvenţmetrul electronic *8* (tip E0205). Montajul mai poate cuprinde un inscriptor XY *9* şi un oscilograf *10* (model N117). În cazul utilizării unui oscilograf, la înregistrarea vibraţiilor armonice, frecvenţa mişcării oscilatorii poate fi determinată cu ajutorul vibrogramelor, trasate în raport cu timpul pe un caroiaj milimetric.

◆ Pentru determinarea pulsaţiei proprii ω_n a sistemul vibrator, se consideră cunoscute următoarele mărimi:

- I_P – momentul de inerţie polar al secţiunii spirei;

VIBRATII Draft Student

• modulul de elasticitate transversal al materialului din care este confecţionat arcul:

$$G = 8 \cdot 10^5 \text{ [kgf/cm}^2\text{]} = 7{,}84 \cdot 10^{10} \text{ [Pa];.}$$

$$\{1\text{kgf} = 9{,}8\text{N};\ 1 \text{ Pa} = 1 \text{ N/m}^2\}$$

• diametrul sârmei arcului: d (se măsoară) (d = 1,25 cm);

• numărul de spire active ale resortului: n (arcul are supuse deformării un număr de n = 6,5 spire);

• greutatea maselor aşezate la partea superioară a resortului: F = 17 [kgf].

4.1. Determinarea analitică a pulsaţiei proprii a sistemului

are la bază relaţia de legătură între pulsaţie, masă şi constanta elastică:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{1.13}$$

în care constanta k este dată pentru arcul elicoidal cilindric de relaţia (1.12).

Cunoscând datele iniţiale, se calculează:

◆**1°** constanta elastică a sistemului, cu relaţia (1.12):

$$k = \frac{G\left[\frac{kgf}{cm^2}\right] \cdot d^4\left[cm^4\right]}{8 \cdot D^3\left[cm^3\right] \cdot n} = \ldots\ldots \left[\frac{kgf}{cm}\right] \tag{1.12'}$$

în care n reprezintă numărul de spire active (n = 6,5), iar D = 14,6 cm;

◆**2°** masa m, cunoscând greutatea corpurilor F (prin cântărire, F = 17 kgf):

$$m = \frac{F\left[kgf\right]}{g\left[m/s^2\right]} = \frac{F\left[kgf\right]}{9{,}8 \cdot 10^2\left[cm/s^2\right]} = \ldots\ldots \left[\frac{kgf}{cm/s^2}\right] \tag{1.14}$$

◆**3°** se calculează pulsaţia proprie, cu relaţia (1.13):

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k\left[\frac{kgf}{cm}\right]}{m\left[\frac{kgf}{cm/s^2}\right]}} = \ldots\ldots \left[\frac{1}{s}\right] = \ldots\ldots \left[rad/s\right] \tag{1.11'}$$

◆**4°** perioada mişcării vibratorii:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_n\left[rad/s\right]} = \ldots\ldots \left[s\right] \tag{1.15}$$

4.2. Determinarea grafică a pulsaţiei proprii ω_n

Pulsaţia proprie ω_n se poate obţine în mod indirect, prin măsurarea pe oscilogramă a perioadei mişcării oscilatorii. În acest sens, se parcurg următoarele etape:

◆ Se alege la inscriptor scara de viteze la valoarea s = 0,5 s/cm;

◆ Se aşează pe resort discul *2* şi greutăţile măsurate, totalizând masa “m” şi se imprimă

VIBRAŢII Student Draft

un impuls iniţial acestora. Se înregistrează la inscriptor deplasarea traductorului.

◆ Pe curba trasată la inscriptor se măsoară distanţa "*w*" (în cm) dintre "*r*" perioade (fig.1.4) şi se calculează perioada mişcării oscilatorii, luând în consideraţie şi scara de viteze *s* selectată pe inscriptor:

$$T_{gr} = \frac{w[cm]}{r} \cdot s[s/cm] = ... [s] \tag{1.16}$$

◆ Pulsaţia proprie a sistemului va fi:

$$\omega_{n\,gr} = \frac{2\pi}{T_{gr}} = ... [rad/s] \tag{1.17}$$

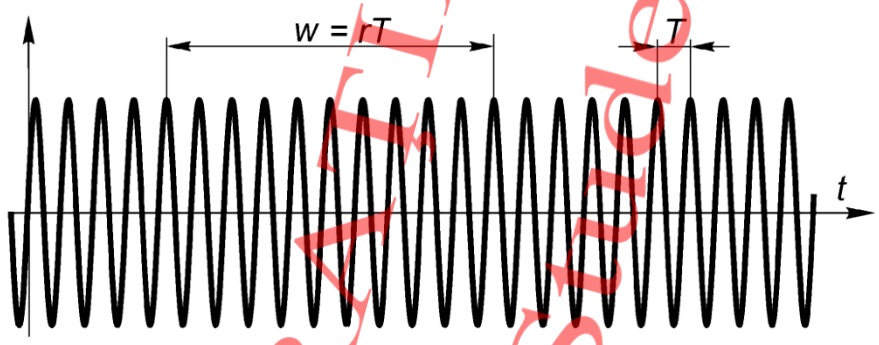

Fig.1.4. Modul de măsurare pe vibrograma trasată pe inscriptor

VIBRATII Draft Student

4.3. Determinarea experimentală a constantei elastice a resortului

Constanta elastică a unui resort poate fi determinată pe cale experimentală cu ajutorul unui dinamomentru. Se utilizează un dinamometru cu constanta c_d = 0,5 N/0,01 mm (valoare care poate fi aproximată la 0,5 kgf/0,01mm), la care este ataşat un comparator cu cadran de 0,01 mm/diviziune.

Experimentul se face pe o maşină de găurit, având în vedere distanţa mare între pinola maşinii şi masă, cursa suficientă a pinolei, posibilitatea deplasării manuale a ei şi indicarea cursei acesteia. Montajul se observă în figura 1.5. Pe masa maşinii *1* se aşează resortul *2*, discul de centrare *3* şi dinamometru *4*, prevăzut cu comparatorul *5* cu precizie de 0,01mm. Întregul pachet este prestrâns cu pinola *6* a maşinii de găurit.

Pentru poziţia prestrânsă a pachetului arc–disc–dinamometru, se pune comparatorul la zero şi se consideră (pe rigleta de deplasare a pinolei) originea zero a săgeţii statice a resortului. Se presează încet pachetul, prin deplasarea pinolei şi, la fiecare 5 mm de deformare a resortului (deplasarea pinolei se va face din 5 în 5 mm), se citeşte indicaţia comparatorului.

Deformarea resortului (săgeata statică) şi valorile măsurate pentru forţă se vor trece în tabelul 1.1. Fiecărei determinări îi va corespunde, prin calcul, un coeficient de elasticitate k_j. Cu cât numărul de determinări va fi mai mare, cu atât mai aproape de realitate va fi valoarea coeficientului k_{med}, obţinut ca medie aritmetică a celor *j* valori calculate.

5. Modul de lucru

◆ Se măsoară dimensiunile resortului şi se cântăresc masele utilizate.

◆ Se calculează pulsaţia proprie a sistemului oscilator şi perioada mişcării vibratorii, urmărind etapele de la punctul 4.1.

◆ Se determină grafic perioada mişcării T_{gr} şi se calculează pulsaţia proprie ω_{ngr} a mişcării, conform etapelor de la paragraful 4.2.

◆ Se realizează montajul din figura 1.5 şi se efectuează determinările experimentale. Se centralizează datele în tabelul 1.1 şi se calculează valoarea medie a constantei elastice a resortului k_{med}.

◆ Se compară valorile obţinute pentru constanta elastică a resortului şi se explică diferenţele dintre acestea.

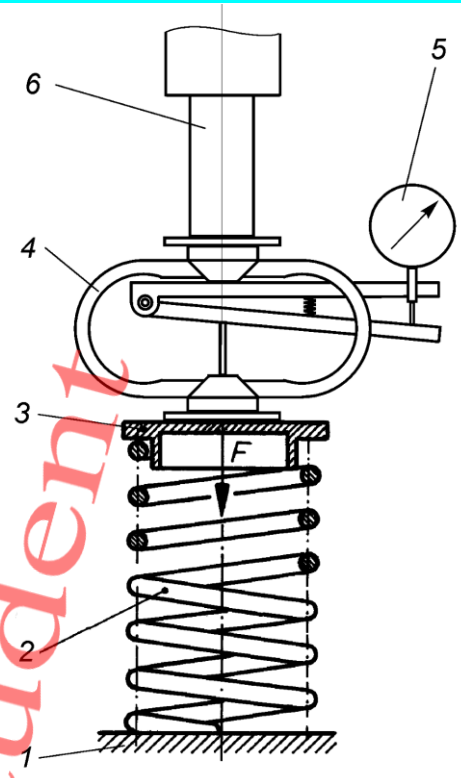

Fig.1.5. Schema de montare a resortului pentru determinarea constantei elastice

Tab.1.1.

x_j [cm]	Forţa F_j div	Forţa F_j val [kgf]	$k_j = F_j / x_j$ [kgf/cm]	k_{med} [kgf/cm]
0,5				
1				
1,5				
2				
2,5				
3				
3,5				
4				
4,5				
5				

VIBRAŢII Student Draft

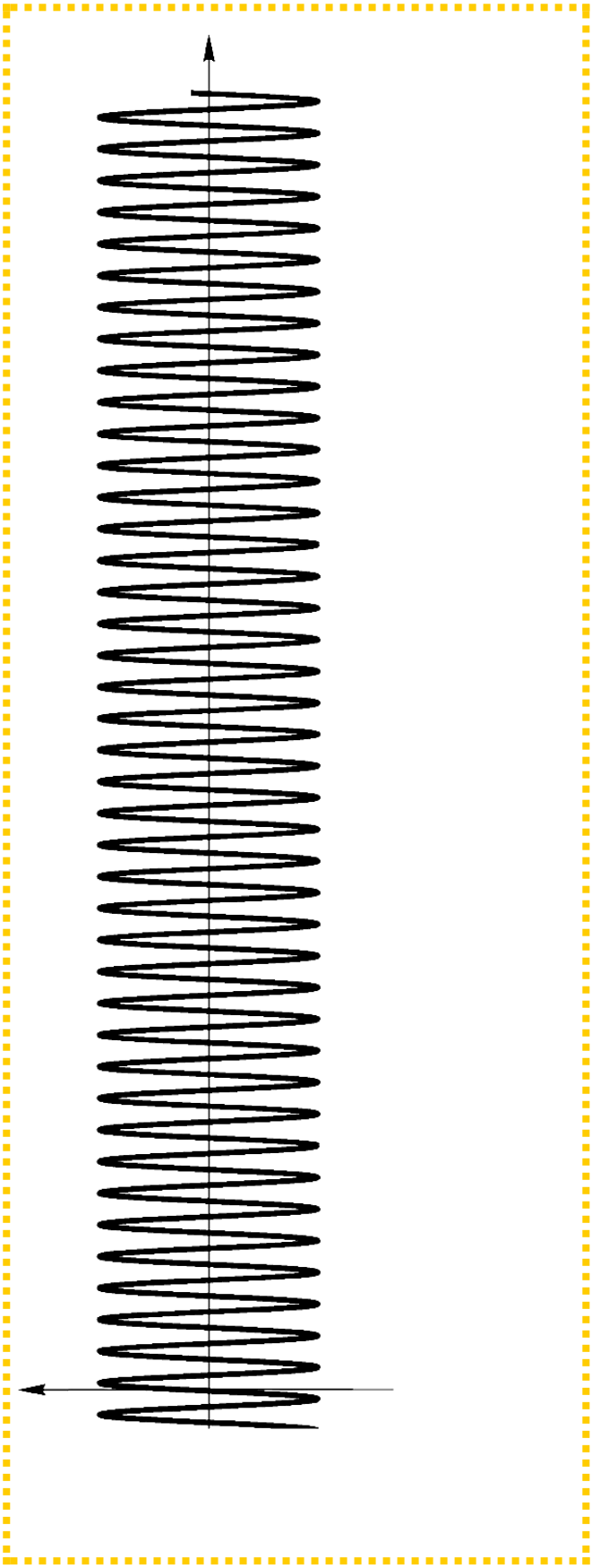

Fig.1.6. Vibrogramă înregistrată