COMPUNEREA VIBRAŢIILOR ARMONICE ORTOGONALE

VM 4

1. Conţinutul lucrării

◆ Modul de compunere a vibraţiilor armonice ortogonale de aceeaşi pulsaţie şi de pulsaţii diferite.
◆ Modul de obţinere a figurilor Lissajous.

2. Consideraţii teoretice

În cazul în care un mobil execută o deplasare alternativă într-un plan *Oxy* (format de două axe rectangulare), astfel încât coordonatele *x* şi *y* ale mobilului variază armonic, mişcarea complexă a mobilului poate fi redusă la 2 mişcări vibratorii armonice ortogonale, una pe direcţia *x*, iar cealaltă pe direcţia y. Interesează în mod deosebit să se determine *traiectoria mobilului*.

2.1 Compunerea vibraţiilor armonice ortogonale de aceeaşi pulsaţie

Când mobilul execută 2 vibraţii armonice ortogonale de aceeaşi pulsaţie ω, legea deplasării acestuia poate fi scrisă astfel:

$$\begin{cases} x = x_0 \cos \omega t \\ y = y_0 \cos(\omega t + \varphi) \end{cases} \tag{4.1}$$

Se elimină din cele 2 ecuaţii «ω*t*» şi se obţine, ca traiectorie, o elipsă cu centrul în origine şi cu axele rotite (figura 4.1.)

$$\frac{x^2}{x_0^2 \cdot \sin^2 \varphi} + \frac{y^2}{y_0^2 \cdot \sin^2 \varphi} - \frac{2xy \cdot \cos \varphi}{x_0 y_0 \cdot \sin^2 \varphi} = 1 \tag{4.2}$$

Pentru anumite valori ale defazajului φ, ecuaţia (4.2) capată forme particulare:
◆ Când defazajul φ = 0, traiectoria devine o dreaptă conţinută în cadranele I şi III ale sistemului de axe *Oxy*: elipsa degenerează într-o dreaptă. Pe această dreaptă, mobilul descrie un segment simetric faţă de origine.

Prin eliminarea lui cosω*t* din sistemul de ecuaţii (4.1), rezultă:

$$\frac{x}{x_0} = \frac{y}{y_0} \tag{4.3}$$

• Pentru φ = π, mobilul descrie un segment simetric faţă de origine, pe o dreaptă conţinută în cadranele II şi IV.

Prin eliminarea lui cosωt din sistemul de ecuaţii (4.1) rezultă:

$$\frac{x}{x_0} = -\frac{y}{y_0} \tag{4.4}$$

VIBRAII Draft Student

◆ Pentru $\varphi = \pi/2$ sau $3\pi/2$, traiectoria este o elipsă, având ca axe, axele sistemului de coordonate (v.fig. 4.2a). Făcând înlocuirile în ecuaţia (4.2), rezultă:

$$\frac{x^2}{x_0^2} + \frac{y^2}{y_0^2} = 1 \qquad (4.5)$$

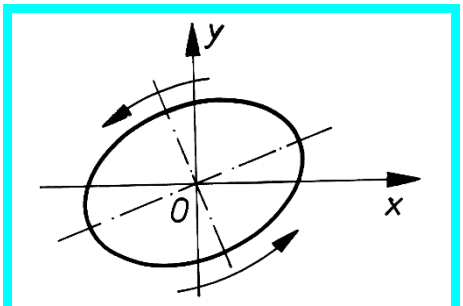


Fig. 4.1.

2.2. Compunerea vibraţiilor armonice ortogonale de pulsaţii diferite

În acest caz, ecuaţiile de mişcare ale mobilului se pot scrie:

$$\begin{cases} x = x_0 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) \\ y = y_0 \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \end{cases} \qquad (4.6)$$

Traiectoriile mişcării rezultate sunt curbe complicate.
Se disting două situaţii:
◆ traiectoriile sunt curbe închise;
◆ traiectoriile sunt curbe deschise.

◆ Dacă traiectoriile se închid, înseamnă că mobilul trece prin acelaşi punct după un timp T_0, ceea ce impune ca perioada T_0 să fie multiplu al celor două perioade, definite prin relaţia:

$$T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} \quad \text{şi} \quad T_2 = \frac{2\pi}{\omega_2} \qquad (4.7)$$

adică: $T_0 = n_1 \cdot T_1 = n_2 \cdot T_2$, unde n_1 şi n_2 sunt numere întregi. De unde:

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{n_1}{n_2} \qquad (4.8)$$

Rezultă că T_0 reprezintă cel mai mic multiplu comun al perioadelor T_1 şi T_2. Condiţia ca traiectoria să se închidă este ca raportul ω_1 / ω_2 să fie un număr raţional.

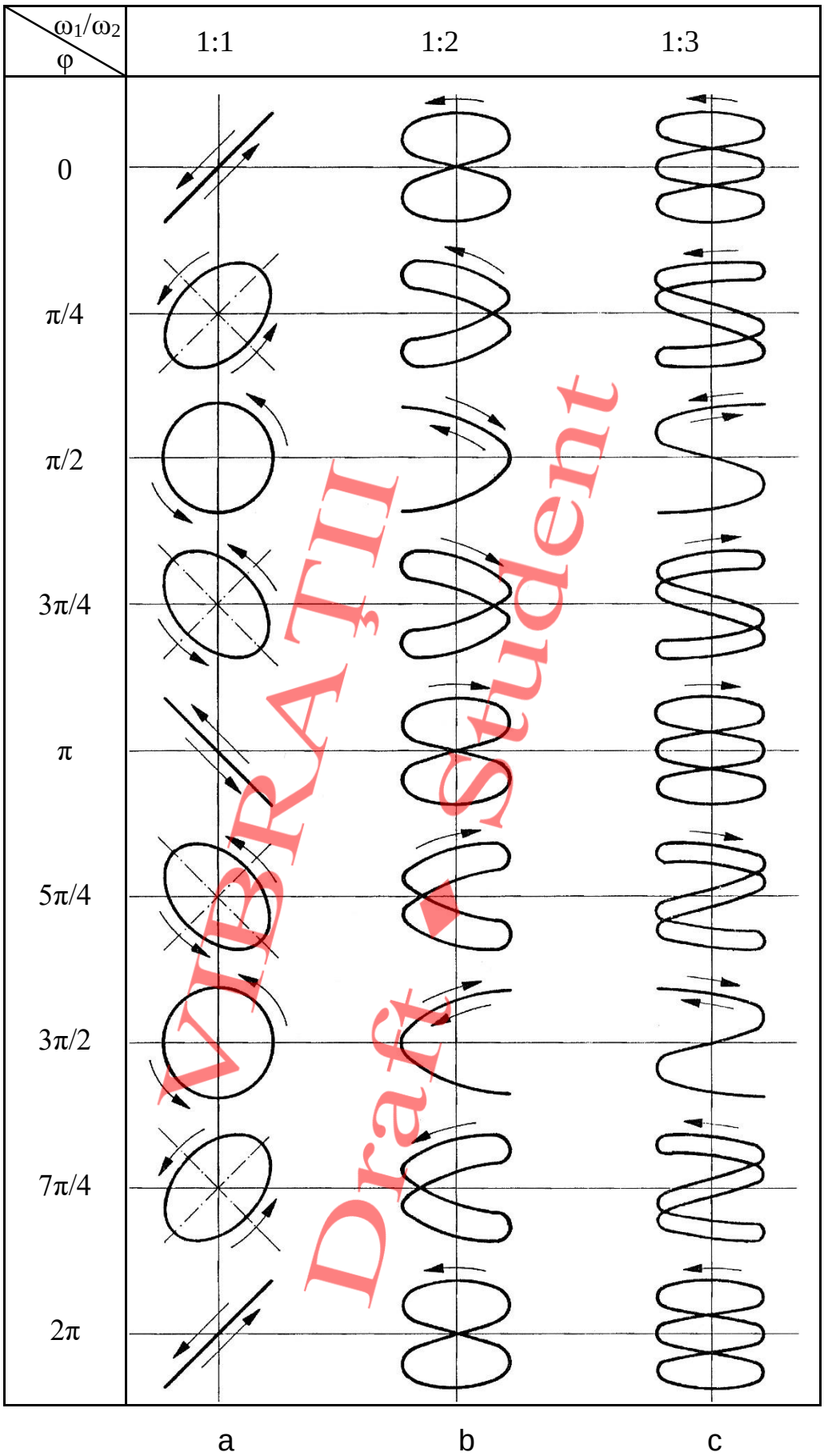
Forma traiectoriilor depinde de raportul amplitudinilor x_0/y_0, de raportul pulsaţiilor ω_1 / ω_2 şi de defazajul φ.

Traiectoriile descrise de mobil în mişcarea rezultată din compunerea a două vibraţii armonice ortogonale se numesc ***figurile (curbele) lui Lissajous***. Aceste curbe se pot pune în evidenţă prin modele experimentale (mecanice, optice, electronice etc.).

În figura 4.2 s-a prezentat cazul particular în care amplitudinile x_0 şi y_0 ale celor două mişcări oscilatorii ortogonale sunt egale, drept pentru care, la un raport al pulsaţiilor egal cu unitatea, traiectoria mişcării rezultante este un cerc pentru defazajul $\varphi = \pi/2$ şi $3\pi/2$. În fig.4.2a sunt figurile Lissajours pentru raportul $\omega_1/\omega_2 = 1:1$, în fig.4.2b pentru raportul 1:2, iar în fig.4.2c pentru 1:3. Pentru defazajul φ s-au ales câteva valori particulare: 0; $\pi/4$; $\pi/2$; $3\pi/4$; π, $5\pi/4$; $3\pi/2$; $7\pi/4$; 2π.

◆ Dacă raportul ω_1/ω_2 reprezintă un număr iraţional, se poate demonstra matematic că traiectoria mişcării rezultate nu va trece de două ori prin acelaşi punct.

VIBRAŢII ◆ student Draft



VIBRAŢII
Draft student

Fig. 4.2.

◆ În cazurile în care ω_1 şi ω_2 diferă puţin între ele, legea de mişcare a mobilului se scrie în forma (4.9),

$$\begin{cases} x = x_0 \cos\omega t \\ y = y_0 \cos[(\omega + \Delta\omega)t + \varphi] \end{cases} \tag{4.9}$$

iar pentru o diferenţă $\Delta\omega$ foarte mică, curbele lui Lissajous arată ca în figura 4.3.

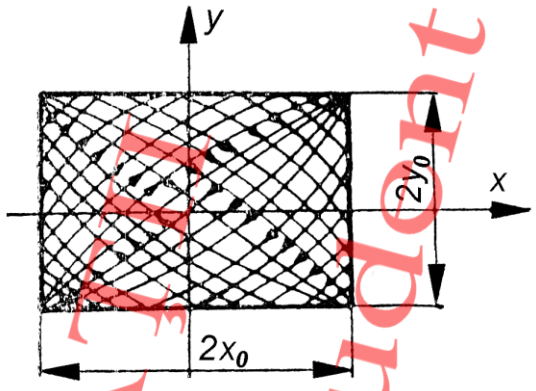


Fig. 4.3.

3. Materiale şi aparatura necesară

Pentru desfăşurarea lucrării practice se utilizează două generatoare de joasă frecvenţă E 0501, la care frecvenţa semnalului poate fi reglată continuu între 1Hz şi 1MHz şi un osciloscop universal model E 0102, ce poate lucra în domeniul 0 ÷ 10 MHz. Pentru obţinerea şi vizualizarea pe osciloscop a curbelor Lissajous, s-a realizat montajul din figura 4.4.

4. Modul de lucru

Se efectuează montajul aparatelor conform fig.4.4 şi se fac reglajele pentru obţinerea figurilor Lissajous la amplitudini egale ale oscilaţiilor ortogonale ($x_0 = y_0$), pentru diferite rapoarte ω_1 / ω_2 : 1:1; 1:2; 1:3; 1:4; 1:5 şi pentru diferite unghiuri de defazaj φ.

◆ Se modifică raportul amplitudinilor x_0 /y_0 la valoarea aproximativă 1:2 şi se repetă reglajele.

◆ Se impun valori apropiate pentru cele două pulsaţii pentru a se obţine curbe asemănătoare celor din figura 4.3.

5. Conţinutul referatului

Referatul va cuprinde:

◆ ecuaţiile de mişcare în cazul vibraţiilor armonice ortogonale şi figurile lui Lissajous pentru cazurile particulare prezentate;

◆ schema instalaţiei de producere, sumare şi vizualizare a vibraţiilor armonice ortogonale (curbele lui Lissajous);

◆ se precizează traiectoriile obţinute în mod practic şi se indică condiţiile de obţinere a acestora.

VIBRAŢII Draft Student

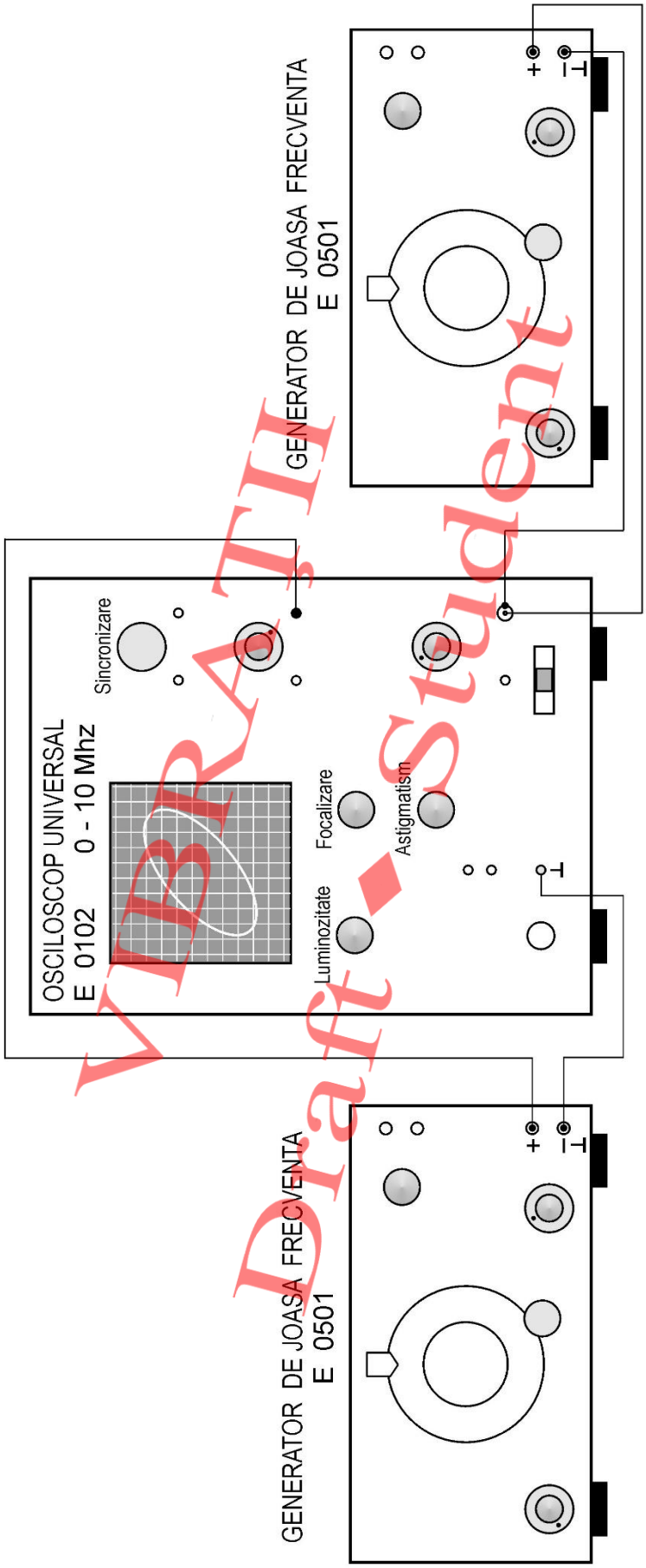


Fig. 4.4

VIBRATII Draft Student