CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

ETAPA NAȚIONALĂ
21 mai 2022
Filiera tehnologică – toate profilurile

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE
Clasa a IX –a

Subiectul 1.

Pe latura BC a triunghiului ABC se consideră punctele M, N și P astfel încât $BM = MN = NP = PC$. Notăm $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ și $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$.

a) Descompuneți vectorii $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AN}$ și $\overrightarrow{AP}$ după vectorii $\vec{u}$ și $\vec{v}$.

b) Dacă punctul D este astfel încât $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AM} + 2\overrightarrow{AN} - 3\overrightarrow{AP}$, arătați că punctele A, B, C și D sunt vârfuri ale unui paralelogram.

SOLUȚIE:

a) AN este mediană în triunghiul ABC, prin urmare $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right) = \frac{1}{2}\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v}$. **2p**

AM este mediană în triunghiul ABN, prin urmare $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AN}\right) = \frac{3}{4}\vec{u} + \frac{1}{4}\vec{v}$. **1p**

AP este mediană în triunghiul ANC, prin urmare $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AN} + \overrightarrow{AC}\right) = \frac{1}{4}\vec{u} + \frac{3}{4}\vec{v}$. **1p**

b) Ținând cont de descompunerile de mai sus, obținem că $\overrightarrow{AD} = \vec{u} - \vec{v} = \overrightarrow{CB}$, ... **2p**
prin urmare $ADBC$ este un paralelogram. **1p**

Subiectul 2.

Scopul unui joc este înlocuirea cu numere reale a literelor din dreptunghiul alăturat astfel încât numerele de pe fiecare linie și numerele de pe fiecare coloană să fie termeni consecutivi ai câte unei progresii aritmetice cu rația nenulă.

a	b	c	d
e	f	g	h
i	j	k	l

a) Găsiți o modalitate corectă de completare a dreptunghiului.

b) Maria completează corect dreptunghiul și observă că $e + h = 337$. Care este suma tuturor celor 12 numere din dreptunghiul Mariei?

SOLUȚIE:

a) O posibilă modalitate de completare a dreptunghiului este următoarea:
.... **3p**

1	2	3	4
3	4	5	6
5	6	7	8

b) Cum elementele fiecărei linii sunt în progresie aritmetică, rezultă că $a + d = b + c$, $e + h = f + g$ și $i + l = j + k$. Înseamnă că suma elementelor din întregul dreptunghi este $2\left(a + e + i + d + h + l\right)$. **2p**

Însă elementele fiecărei coloane sunt în progresie aritmetică, așadar $a + i = 2e$ și $d + l = 2h$. Rezultă că suma celor 12 numere din tabel este $6\left(e + h\right) = 2022$. **2p**

Subiectul 3.

Trei obiective militare *A*, *B* și *C*, situate într-o zonă de câmpie, sunt legate prin drumuri drepte având lungimile $AB = 200$ km, $BC = 150$ km și $CA = 250$ km.

a) Trebuie construită în câmp o bază pentru elicoptere *O* aflată la egală distanță (aeriană) de cele trei obiective militare ($OA = OB = OC$). Aflați această distanță.

b) Pe drumul care leagă *A* și *B* se instalează o stație radar *R* astfel încât aceasta să se afle la distanță egală de drumurile *AC* și *BC*. Determinați distanța *AR*.

SOLUȚIE:

a) Din reciproca teoremei lui Pitagora rezultă că unghiul $\widehat{B}$ este drept. **1p**

Baza trebuie construită în centrul *O* al cercului circumscris triunghiului *ABC*. Cum triunghiul este dreptunghic, *O* este mijlocul ipotenuzei *AC*. Distanța de la *O* la vârfuri este $\frac{1}{2}AC = 125$ km. **2p**

b) Fie *D* proiecția punctului *R* pe dreapta *AC*. Condiția de egală depărtare față de cele două drumuri revine la $RD = RB$. **1p**

Triunghiurile *ADR* și *ABC* sunt asemenea (U.U.), ... **1p**

prin urmare $\frac{AR}{AC} = \frac{RD}{BC}$. Deducem că $\frac{AR}{250} = \frac{200 - AR}{150}$, deci $AR = 125$ km. **2p**

Subiectul 4.

Fie *a* și *b* două numere întregi. Considerăm mulțimile $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + ax + b = 0\}$ și $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + bx + a = 0\}$.

a) Știind că $\sqrt{2} \in A$, determinați mulțimile *A* și *B*.

b) Demonstrați că există o infinitate de perechi de numere întregi (a, b) pentru care mulțimea $A \cup B$ are cardinalul egal cu 3.

SOLUȚIE:

a) $\sqrt{2}$ este soluție a ecuației $x^2 + ax + b = 0$, prin urmare $(2 + b) + a\sqrt{2} = 0$. **1p**

Cum *a* și *b* sunt numere întregi iar $\sqrt{2}$ este număr irațional, rezultă că $a = 0$ și $b = -2$. **1p**

Pentru aceste valori, $A = \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$ și $B = \{0, 2\}$. **2p**

b) Luând $b = -1 - a$, cu $a \in \mathbb{Z} \setminus \{-2, 1\}$, ... **2p**

avem că $A = \{1, b\}$, $B = \{1, a\}$, cu $1 \neq a \neq b \neq 1$, prin urmare mulțimea $A \cup B$ are cardinalul egal cu 3. .... **1p**