MINISTERUL EDUCAȚIEI

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

ETAPA NAȚIONALĂ
21 mai 2022

Filiera tehnologică – toate profilurile

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE

Clasa a X -a

Subiectul 1.

a) Calculați $N=[\log_2 20]+[\log_3 30]+[\log_4 40]$, unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a numărului x.

b) Fie $a\in(0,+\infty)\setminus\{1\}$. Arătați că, dacă $\lg a=x$, $\log_6 a=y$ şi $\log_{15} a=z$, atunci are loc relația:

$$\frac{1}{\log_2 a}+\frac{1}{\log_3 a}+\frac{1}{\log_5 a}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right).$$

SOLUŢIE:

a) Deoarece $2^4<20<2^5$, rezultă că $4<\log_2 20<5$, de unde se deduce că $[\log_2 20]=4$ **1p**

Din $3^3<30<3^4$, rezultă că $3<\log_3 30<4$, de unde se deduce că $[\log_3 30]=3$ **1p**

Din $4^2<40<4^3$, rezultă că $2<\log_4 40<3$, de unde se deduce că $[\log_4 40]=2$ **1p**

Rezultă astfel că $N=[\log_2 20]+[\log_3 30]+[\log_4 40]$=4+3+2=9...**1p**

b) $\frac{1}{\log_2 a}+\frac{1}{\log_3 a}+\frac{1}{\log_5 a}=\log_a 2+\log_a 3+\log_a 5=\log_a 30$ **1p**

$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\lg a}+\frac{1}{\log_6 a}+\frac{1}{\log_{15} a}\right)=\frac{1}{2}(\log_a 10+\log_a 6+\log_a 15)=\frac{1}{2}\log_a 900=\log_a 30$ de unde rezultă egalitatea ce se cerea a fi demonstrată...**2p**

Subiectul 2.

O agenție imobiliară a vândut în anul 2020 un număr n de apartamente, unde $n\in\{1,2,3,....200\}$. În anul 2021, vânzările au crescut cu 28%, iar în anul 2022 este preconizată o scădere cu 15% față de anul 2021.

a) Arătați că n este divizibil cu 25.

b) Aflați numărul n.

c) Cu ce procent va creşte numărul apartamentelor preconizate a fi vâdute în anul 2022 față de numărul apartamentelor vândute în anul 2020?

SOLUŢIE:

a)În anul 2021 s-au vândut $n+28\%\cdot n=\frac{32n}{25}$ apartamente **1p**

Cum $\frac{32n}{25}\in\mathbb{N}$ şi (32,25)=1, atunci n este divizibil cu 25...**1p**

b)În anul 2022 se prognozează că se vor vinde $\frac{32n}{25}-15\%\cdot\frac{32n}{25}=\frac{136n}{125}$ apartamente.......................................**1p**

Cum $\frac{136n}{125}\in\mathbb{N}$ şi (136,125)=1, atunci n este divizibil cu 125...**1p**

Ținând cont că $n\in\{1,2,3,....200\}$ şi $n \vdots 125$ rezultă că $n=125$ **1p**

c)În anul 2022 se prognozează că se vor vinde $\frac{136\cdot125}{125}=136$ apartamente.......................................**1p**

Notând cu $p\%$ creşterea numărului de apartamente vândute, are loc relația $p\%\cdot125=136-125$ de unde se obține $p\%=8{,}8\%$. **1p**

Subiectul 3.

În reperul cartezian xOy se consideră punctul $A(0,1)$, prin care se duce dreapta d paralelă cu prima bisectoare a sistemului de axe (de ecuație $y = x$).

a) Arătați că ecuația dreptei d este $y = x + 1$.

b) Aflați numărul real m știind că dreapta d este perpendiculară pe dreapta d' a cărei ecuație este: $(m^2 - 4m + 3)x - y + m + 2 = 0$, unde $m \in \mathbb{R}$.

c) Dacă dreapta d intersectează graficul funcției $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2$ în punctele B și C, aflați coordonatele punctelor B și C și măsura $\sphericalangle BOC$.

SOLUȚIE:

a) Cum dreapta d este paralelă cu prima bisectoare, rezultă $m_d = 1$ și ecuația dreptei d este $y - 1 = 1 \cdot (x - 0)$, de unde (d): $y=x+1$..**1p**

b) Cum $d \perp d' \Rightarrow m_d \cdot m_{d'} = -1 \Rightarrow m^2 - 4m + 3 = -1 \Rightarrow m = 2$.……………………………………………………......….**2p**

c) Pentru a determina abscisele punctelor B și C se rezolvă ecuația $x + 1 = x^2$ ....…**1p**

$x_B = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}, x_C = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow y_B = f(x_B) = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}, y_C = f(x_C) = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow B\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}, \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\right)$ și

$C\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}, \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$ ………………...................……...**1p**

$BC = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2} = \sqrt{10}, OB = \sqrt{{x_B}^2 + {y_B}^2} = \sqrt{5 - 2\sqrt{5}}, OC = \sqrt{{x_C}^2 + {y_C}^2} = \sqrt{5 + 2\sqrt{5}}$ **1p**

Din $BC^2 = OB^2 + OC^2$, conform reciprocei Teoremei lui Pitagora deduce că $m(\sphericalangle BOC) = 90^0$ …………………....**1p**

Subiectul 4.

Fie $A = (2+\sqrt{3})^{2022}$ și $B = (2-\sqrt{3})^{2022}$.

a) Arătați că $A + B \in \mathbb{N}$.

b) Arătați că $[A]$ este număr natural impar, unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a numărului x.

c) Folosind eventual faptul că $2-\sqrt{3} < \dfrac{1}{2}$ și că $2^{10} > 10^3$, determinați suma primelor 606 zecimale ale numărului B.

SOLUȚIE:

a) $A + B = (C_{2022}^0 2^{2022} + C_{2022}^1 2^{2021} \cdot \sqrt{3} + C_{2022}^2 2^{2020} \cdot \sqrt{3}^2 + C_{2022}^3 2^{2019} \cdot \sqrt{3}^3 + ... + C_{2022}^{2021} 2 \cdot \sqrt{3}^{2021} + C_{2022}^{2022} \sqrt{3}^{2022}) +$
$+(C_{2022}^0 2^{2022} - C_{2022}^1 2^{2021} \cdot \sqrt{3} + C_{2022}^2 2^{2020} \cdot \sqrt{3}^2 - C_{2022}^3 2^{2019} \cdot \sqrt{3}^3 + ... - C_{2022}^{2021} 2 \cdot \sqrt{3}^{2021} + C_{2022}^{2022} \sqrt{3}^{2022})$. ……………..**2p**

$A + B = 2 \cdot (C_{2022}^0 2^{2022} + C_{2022}^2 2^{2020} \cdot 3 + C_{2022}^4 2^{2018} \cdot 3^2 + ... + C_{2022}^{2022} 3^{1011}) \in \mathbb{N}$ **1p**

b) Din $(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3}) = 1 \Rightarrow 2 - \sqrt{3} = \dfrac{1}{2+\sqrt{3}} < 1$...…**1p**

Cum $2 - \sqrt{3} \in (0,1) \Rightarrow B = (2-\sqrt{3})^{2022} \in (0,1)$ și folosind rezultatul obținut la punctul a), rezultă că $[A] = 2 \cdot (C_{2022}^0 2^{2022} + C_{2022}^2 2^{2020} \cdot 3 + C_{2022}^4 2^{2018} \cdot 3^2 + ... + C_{2022}^{2022} 3^{1011}) - 1$ care este număr natural impar **1p**

c) $B = (2-\sqrt{3})^{2022} = \dfrac{1}{(2+\sqrt{3})^{2022}} < \dfrac{1}{2^{2022}} < \dfrac{1}{2^{2020}} = \dfrac{1}{\left(2^{10}\right)^{202}}$ ………………………….....................**1p**

$\dfrac{1}{\left(2^{10}\right)^{202}} < \dfrac{1}{\left(10^3\right)^{202}} = \dfrac{1}{10^{606}}$, de unde rezultă că primele 606 zecimale ale lui B sunt zerouri, prin urmare suma lor va fi 0..**1p**