INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

ETAPA NAȚIONALĂ
21 mai 2022
Filiera tehnologică – toate profilurile

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

Clasa a X -a

Subiectul 1.
Fie polinomul $f = X^3 - 2mX^2 + 2\left(m^2 - 2\right)X - 1 \in \mathbb{R}[X]$ și $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{C}$ rădăcinile lui.

a) Determinați $m \in \mathbb{R}$, știind că restul împărțirii lui f la $X - m$ este egal cu -1.

b) Arătați că expresia $E = \frac{x_1}{x_2x_3} + \frac{x_2}{x_1x_3} + \frac{x_3}{x_1x_2}$ nu depinde de *m*.

c) Determinați $m \in \mathbb{N}$, știind că polinomul *f* admite o rădăcină naturală.

SOLUȚIE:

a) $f(m) = -1 \Rightarrow m^3 - 2m^3 + 2\left(m^2 - 2\right)m - 1 = -1 \Leftrightarrow m^3 - 4m = 0 \Leftrightarrow m \in \{-2, 0, 2\}$ .... **2 p**

b) $x_1 + x_2 + x_3 = 2m,\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 2\left(m^2 - 2\right)$ și $x_1x_2x_3 = 1$ **1p**

$E = \frac{x_1^{\ 2} + x_2^{\ 2} + x_3^{\ 2}}{x_1x_2x_3} = x_1^{\ 2} + x_2^{\ 2} + x_3^{\ 2} = \left(x_1 + x_2 + x_3\right)^2 - 2\left(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3\right) = 8$ nu depinde de *m* **2p**

c) Dacă $m \in \mathbb{N} \Rightarrow f \in \mathbb{Z}[X]$ și dacă $x_1 \in \mathbb{N}$, atunci $x_1 / (-1) \Rightarrow x_1 = 1$ **1p**

$f(1) = 0 \Rightarrow 1 - 2m + 2m^2 - 4 - 1 = 0 \Leftrightarrow m^2 - m - 2 = 0 \Rightarrow m = 2$ **1p**

Subiectul 2.
Maria, elevă în clasa a XII-a, găsește din întâmplare o ciornă în care colegul ei, Mihai, încerca să rezolve o problemă. Din ciornă ea constată că este vorba de o structură de corp comutativ $(\mathbb{R}; *; \circ)$, izomorf cu $(\mathbb{R}; +; \cdot)$ printr-o funcție de gradul I și în care $e = 5$ este elementul neutru al operației ”$*$” iar $\bar{e} = 6$ este elementul neutru al operației ”$\circ$”. Folosind aceste informații și știind că Maria a rezolvat corect întreaga problemă, răspundeți la următoarele cerințe:

a) Arătați că funcția care realizează izomorfismul este $f : (\mathbb{R}; *; \circ) \to (\mathbb{R}; +; \cdot)$, $f(x) = x - 5$.

b) Demonstrați că $x * y = x + y - 5$ și $x \circ y = xy - 5x - 5y + 30$.

c) Determinați opusul și inversul lui 2022 în structura $(\mathbb{R}; *; \circ)$.

SOLUȚIE:

a) Având în $(\mathbb{R}; *; \circ)$ $e = 5$ și $\bar{e} = 6$, dacă $f : (\mathbb{R}; *; \circ) \to (\mathbb{R}; +; \cdot)$ este izomorfism, $f(5) = 0$ și $f(6) = 1$ **2p**

$f(x) = ax + b$, $f(5) = 0$ și $f(6) = 1$ $\Rightarrow$ $a = 1$, $b = -5$ **1p**

b) $f(x * y) = f(x) + f(y)$ $\Rightarrow$ $x * y - 5 = (x - 5) + (y - 5)$ $\Rightarrow$ $x * y = x + y - 5$ **1p**

$f(x \circ y) = f(x) \cdot f(y)$ $\Rightarrow$ $x \circ y - 5 = (x - 5) \cdot (y - 5)$ $\Rightarrow$ $x \circ y = xy - 5x - 5y + 30$ **1p**

c) Dacă x' este simetricul lui x în $(\mathbb{R}; *)$, $x * x' = 5$ $\Rightarrow$ $x' = 10 - x$ $\Rightarrow$ $2022' = -2012$ **1p**

respectiv x'' este simetricul lui x în $(\mathbb{R}; \circ)$, $x * x'' = 6$ $\Rightarrow$ $x'' = \frac{5x - 24}{x - 5}$ $\Rightarrow$ $2022'' = \frac{10.086}{2017}$ **1p**

Subiectul 3.

Prețul de utilizare a unui aparat este suma dintre prețul de achiziție și costurile de întreținere. Considerăm că acest preț este dat de funcția $C(x)=1000+\frac{1200}{5}\int_0^x \sqrt[5]{2t-1}\,dt$, unde $x\geq 0$ reprezintă numărul de ani trecuți de la momentul $T=0$ al achiziției până la momentul $T=x$, iar $C(x)$ este prețul de utilizare la x ani de la achiziție, exprimat în lei. Se cere:

a) Determinați care este prețul de achiziție al aparatului?
b) Determinați care a fost prețul de întreținere al aparatului la finalul primului an de utilizare.
c) Arătați că prețul de întreținere al aparatului la finalul celui de al șaptelea an de utilizare nu ajunge la 1980 lei.

SOLUȚIE:

a) $C(0)=1000$ lei **1p**

b) $\int_0^x \sqrt[5]{2t-1}\,dt=\frac{5}{12}(2t-1)\sqrt[5]{2t-1}\Big|_0^x=\frac{5}{12}\left[(2x-1)\sqrt[5]{2x-1}-1\right]$ deci $C(x)=900+100(2x-1)\sqrt[5]{2x-1}$ **2p**

$C(1)=1000$ deci, pentru primul an de utilizare, prețul de întreținere este de 0 lei **1p**

c) $C(7)-C(0)=100\cdot\left(13\sqrt[5]{13}-1\right)$ **2p**

$C(7)-C(0)<100\cdot(13\cdot 1{,}6-1)=1980$ lei **1p**

Subiectul 4.

Fie $I_0(x)=1$ și $I_{n+1}(x)=\int_0^x I_n(t)\,dt$ pentru orice $x\in\mathbb{R}$ și orice $n\in\mathbb{N}$.

a) Calculați $I_0(0)+I_1(1)+I_2(2)$.
b) Arătați că $I_n(x)=\frac{x^n}{n!}$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$ și orice $n\in\mathbb{N}$.
c) Arătați că numărul $A=I_0\left(\sqrt{3}\right)+I_2\left(\sqrt{3}\right)+I_4\left(\sqrt[4]{3}\right)+...+I_{20}\left(\sqrt[20]{3}\right)$ este rațional.

SOLUȚIE:

a) $I_1(x)=\int_0^x I_0(t)\,dt=\int_0^x dt=t\Big|_0^x=x\Rightarrow I_1(1)=1$ **1p**

$I_2(x)=\int_0^x I_1(t)\,dt=\int_0^x t\,dt=\frac{t^2}{2}\Big|_0^x=\frac{x^2}{2}\Rightarrow I_2(2)=2$ **1p**

Se obține $I_0(0)+I_1(1)+I_2(2)=1+1+2=4$ **1p**

b) Inducție după $n\in\mathbb{N}$. Verificarea este imediată $I_0(x)=\frac{x^0}{0!}=1$ și demonstrația

$I_{n+1}(x)=\int_0^x \frac{t^n}{n!}dt=\frac{1}{n!}\cdot\frac{t^{n+1}}{n+1}\Big|_0^x=\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$ **2p**

c) $I_0\left(\sqrt{3}\right)=1$, iar $I_n\left(\sqrt[n]{3}\right)=\frac{\left(\sqrt[n]{3}\right)^n}{n!}=\frac{3}{n!}$, oricare $n\in\mathbb{N}^*$ par **1p**

Se obține $A=1+\frac{3}{2!}+\frac{3}{4!}+...+\frac{3}{20!}\in\mathbb{Q}$ **1p**