MINISTERUL EDUCAȚIEI

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

ETAPA NAȚIONALĂ
21 mai 2022

Filiera tehnologică – toate profilurile

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE

Clasa a XI -a

Subiectul 1.

Se consideră matricile $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ și $M(a,b,c)=\begin{pmatrix}a&b&c\\c&a&b\\b&c&a\end{pmatrix}$ unde $a,b,c\in\mathbb{R}$.

a) Calculați $M^{-1}(0,1,0)$;

b) Arătați că dacă $a+b+c\geq 0$, atunci $\det\left(M(a,b,c)\right)\geq 0$.

SOLUȚIE:

a) Determină $M(0,1,0)=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}$ și $M^{-1}(0,1,0)=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$ **3p**

b) $\det\left(M(a,b,\mathrm{c})\right)\overset{L_1+L_2+L_3\to L_1}{=}\begin{vmatrix}a+b+c&a+b+c&a+b+c\\c&a&b\\b&c&a\end{vmatrix}=(a+b+c)\begin{vmatrix}1&1&1\\c&a&b\\b&c&a\end{vmatrix}=$ **1p**

$\underset{C_3-C_1\to C_3}{\overset{C_2-C_1\to C_2}{=}}(a+b+c)\begin{vmatrix}1&0&0\\c&a-c&b-c\\b&c-b&a-b\end{vmatrix}=(a+b+c)\left(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc\right)=$ **2p**

$=\dfrac{1}{2}(a+b+c)\left((a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right)$

$a+b+c\geq 0,(a-b)^2\geq 0,(b-c)^2\geq 0,(c-a)^2\geq 0\Rightarrow\det\left(M(a,b,c)\right)\geq 0$ **1p**

SAU

Se poate folosi inegalitatea $a^2+b^2+c^2\geq ab+bc+ac$ în locul formării pătratelor

Subiectul 2.

Fie $A,B\in M_2(\mathbb{R})$, astfel încât $A\neq O_2$, $A^{2020}+A^{2021}+A^{2022}=O_2$ și $B=A^2+A+I_2$.

a) Verificați dacă $AB=BA$;

b) Demonstrați că $(AB)^n=A^nB^n$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$;

c) Demonstrați că matricea I_2-AB este inversabilă.

SOLUȚIE:

a) $AB=A^3+A^2+A=\left(A^2+A+I_2\right)A=BA$ **1p**

b) Prin inducție demonstrăm că $P(n): AB^n=B^nA,\forall n\in\mathbb{N}^*$

$n=1\Rightarrow AB=BA(conf.\,a))$

Presupunem $P(k)$ adevărată și demonstrăm că $P(k+1)$ este adevărată.

$AB^{k+1}=A\left(B^kB\right)=\left(AB^k\right)B=\left(B^kA\right)B=B^k(AB)=B^k(BA)=B^{k+1}A$ **2p**

Inductiv demonstrăm că $P(n):(AB)^n=A^nB^n,\forall n\in\mathbb{N}^*$

$n=1\Rightarrow AB=BA(conf.\,a))$

Presupunem $P(k)$ adevărată și demonstrăm că $P(k+1)$ este adevărată.

$(AB)^{k+1}=(AB)^k(AB)=\left(A^kB^k\right)(AB)=A^k\left(B^kA\right)B=A^k\left(AB^k\right)B=A^{k+1}B^{k+1}$ **2p**

c) $O_2=A^{2020}+A^{2021}+A^{2022}=A^{2020}\left(I_2+A+A^2\right)=A^{2020}B$

Dacă $C=I_2+(AB)+(AB)^2+\cdots\cdots+(AB)^{2019}$ atunci $(I_2-AB)C=I_2-(AB)^{2020}=I_2-\left(A^{2020}B\right)B^{2019}=I_2$ adică I_2-AB este inversabilă **2p**

Subiectul 3.

La fiecare moment t cantitatea de electricitate ce trece printr-un conductor este $Q(t)=2\cos\pi t$.

Intensitatea curentului electric , la momentul t este dată de relația $I(t)=Q'(t)$.

a) Arătați că $I''(t)+\pi^2I(t)=0$, $\forall t\geq 0$;

b) În ce moment intensitatea curentului este maximă? Precizați valoarea maximă a intensității.

SOLUȚIE:

$a)I(t)=Q'(t)=-2\pi\sin(\pi t),I'(t)=-2\pi^2\cos(\pi t)$

$I''(t)=2\pi^3\sin(\pi t)=2\pi\sin(\pi t)\pi^2=-\pi^2I(t)\Rightarrow I''(t)+\pi^2I(t)=0$ **2p**

$b)I'(t)=0\Rightarrow\cos(\pi t)=0\Rightarrow t=(2k+1)\frac{1}{2},k\in\mathbb{N}\Rightarrow t\in\left\{\frac{1}{2},\frac{3}{2},\frac{5}{2},\frac{7}{2},\ldots\ldots\right\}$ **1p**

t	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{7}{2}$ ....
$I'(t)$	$------0++++++0-----0++++++0-----$				
$I(t)$	$0\searrow\ -2\pi$	$\nearrow\ 2\pi$	$\searrow\ -2\pi$	$\nearrow\ 2\pi$	$\searrow$

Intensitatea este maximă dacă $t=(4k+3)\frac{1}{2},k\in\mathbb{N}$ **2p**

Valoarea maximă a intensității este 2π **2p**

SAU

Se poate folosi inegalitatea $\left|\sin(\pi t)\right|\leq 1,\forall t\in\mathbb{R}_+$ $\left|I(t)\right|\leq 2\pi$ care conduce la același rezultat.

Subiectul 4.

Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-4\ln\sqrt{x}$.

a) Determinați perechea (a,b) de numere reale, pentru care $y=ax+b$ reprezintă ecuația tangentei la graficul funcției în punctul de abscisă $x_0=1$;

b) Calculați $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$;

c) Demonstrați că $\dfrac{x^2+y^2}{2}\geq 1+\ln(xy)$, $\forall x,y\in(0,+\infty)$.

SOLUȚIE:

a) $f'(x)=2x-\dfrac{2}{x}\Rightarrow f'(1)=0$ **1p**

Ecuația tangentei la grafic în punctul $x_0=1$ este $y=1$ deci $a=0$, $b=1$ **1p**

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x^2-4\ln\sqrt{x}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(x^2-2\ln x\right)=\lim\limits_{x\to\infty}x^2\left(1-\dfrac{2\ln x}{x^2}\right)=+\infty$ **2p**

c)

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-------$	0	$+++++++$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow\searrow\searrow\searrow$	1	$\nearrow\nearrow\nearrow\nearrow$	$+\infty$

$\Rightarrow f(x)\geq 1, \forall x\in(0,+\infty)$ **2p**

$x^2-2\ln x\geq 1, \Rightarrow x^2\geq 1+2\ln x$

$y^2\geq 1+2\ln y$

$\overset{+}{\Rightarrow} x^2+y^2\geq 2+2\ln(xy)\Rightarrow\dfrac{x^2+y^2}{2}\geq 1+\ln(xy), \forall x,y\in(0,+\infty)$ **1p**