MINISTERUL EDUCAȚIEI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA NAȚIONALĂ
13 mai 2023

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEȚEAN IAŞI

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAŞINI ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE
Clasa a X –a – Secțiunea H1 – Filieră tehnologică

Subiectul 1.

a) Fie numerele reale $A=\log_2 64+\log_3 729$ și $B=(0,5)^3\cdot\frac{1}{16}\cdot\left(4^{\sqrt{12}}\right)^{\sqrt{3}}$.

Calculați media geometrică a numerelor $2A$ și $3B$.

b) Arătați că $6\in(\log_2 63,\ \log_3 730)$.

c) Calculați $S=[\log_2 1]+[\log_2 2]+[\log_2 3]+...+[\log_2 62]+[\log_2 63]$, unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a numărului real x.

SOLUȚIE:

a) $\log_2 64=\log_2 2^6=6$, $\log_2 729=\log_2 3^6=6$, $A=\log_2 64+\log_3 729=6+6=12.$

$B=\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot\frac{1}{2^4}\cdot(2^2)^{\sqrt{36}}=2^{-7}\cdot 2^{12}=2^5=32.$ 1p

$m_g=\sqrt{2A\cdot 3B}=\sqrt{2^3\cdot 3\cdot 3\cdot 2^5}=2^4\cdot 3=48.$ 1p

b) Deoarece $63<64=2^6$, rezultă că $\log_2 63<\log_2 64=6$.

Deoarece $729=3^6<730$, rezultă că $6=\log_3 729<\log_3 730$,

deci $\log_2 63<6<\log_3 730$ 1p

c) $\log_2 1=0\Rightarrow[\log_2 1]=0.$

Deoarece $2<3<4$, rezultă că $1=\log_2 2<\log_2 3<\log_2 4=2$, de unde se deduce că $[\log_2 2]=[\log_2 3]=1.$

$2^2=4<5<6<7<8=2^3\Rightarrow 2=\log_2 4<\log_2 5<\log_2 6<\log_2 7<\log_2 8=3\Rightarrow$ $[\log_2 4]=[\log_2 5]=[\log_2 6]=[\log_2 7]=2$. 1p

$2^3=8<9<\cdots<15<16=2^4\Rightarrow 3=\log_2 8<\log_2 9<\cdots<\log_2 15<\log_2 16=4$ $\Rightarrow[\log_2 8]=[\log_2 9]=\cdots=[\log_2 15]=3$.

$2^4=16<17<\ldots<31<32=2^5\Rightarrow 4=\log_2 16<\log_2 17<\cdots<\log_2 31<\log_2 32=5\Rightarrow$ $[\log_2 16]=[\log_2 17]=\cdots=[\log_2 31]=4$.

$2^5=32<33<\cdots<63<64=2^6\Rightarrow 5=\log_2 32<\log_2 33<\cdots<\log_2 63<\log_2 64$ $\Rightarrow[\log_2 32]=[\log_2 33]=\cdots=[\log_2 63]=5.$ 1p

$S=0+2\cdot 1+4\cdot 2+8\cdot 3+16\cdot 4+32\cdot 5$ 1p

$S=258.$ 1p

Subiectul 2.

a) Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $x^2+x-2\sqrt{x^2+x-2}=2$.

b) Rezolvați în mulțimea numerelor naturale nenule ecuația $3^{x^2+y-1}-3^{x^2+1}=72$.

c) Rezolvați în mulțimea $[1,\infty)$ ecuația

$$x\cdot\left\{C_{2n}^0\cdot\left[\left(\frac{\lg x}{x^2}\right)^{\frac{1}{4n}}-1\right]^{2n}+C_{2n}^1\cdot\left[\left(\frac{\lg x}{x^2}\right)^{\frac{1}{4n}}-1\right]^{2n-1}+\ldots+C_{2n}^{2n}\cdot\left[\left(\frac{\lg x}{x^2}\right)^{\frac{1}{4n}}-1\right]^0\right\}=\lg x,\quad n\in\mathbb{N}^*.$$

SOLUȚIE:

a) Dacă notăm cu $t=\sqrt{x^2+x-2},\ x^2+x-2\geq 0 \Leftrightarrow x\in(-\infty,-2]\cup[1,\infty)$

ecuația $x^2+x-2-2\sqrt{x^2+x-2}=0 \Leftrightarrow t^2-2t=0 \Leftrightarrow t_1=0;\ t_2=2$ 1p

$\sqrt{x^2+x-2}=0 \Rightarrow x_1=-2;\ x_2=1$

$\sqrt{x^2+x-2}=2 \Leftrightarrow x^2+x-6=0 \Rightarrow x_1=-3;\ x_2=2 \Rightarrow S=\{-3,-2,1,2\}$ 1p

b) $3^{x^2+y-1}-3^{x^2+1}=3^2\cdot 2^3 \Leftrightarrow 3^{x^2+1}(3^{y-2}-1)=3^2\cdot 2^3 \Rightarrow \begin{cases}3^{x^2+1}=3^2\\ 3^{y-2}-1=2^3\end{cases}$ 1p

$\Leftrightarrow \begin{cases}x^2+1=2\\ 3^{y-2}=3^2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=\pm1\\ y=4\end{cases}$. Mulțimea soluțiilor este $S=\{(1,4)\}$..1p

c) $C_{2n}^0\cdot\left[\left(\frac{lgx}{x^2}\right)^{\frac{1}{4n}}-1\right]^{2n}+C_{2n}^1\cdot\left[\left(\frac{lgx}{x^2}\right)^{\frac{1}{4n}}-1\right]^{2n-1}+\cdots+C_{2n}^{2n}\cdot\left[\left(\frac{lgx}{x^2}\right)^{\frac{1}{4n}}-1\right]^0=$

$=C_{2n}^0\cdot\left[\left(\frac{lgx}{x^2}\right)^{\frac{1}{4n}}-1\right]^{2n}\cdot 1^0+C_{2n}^1\cdot\left[\left(\frac{lgx}{x^2}\right)^{\frac{1}{4n}}-1\right]^{2n-1}\cdot 1^1+\cdots+C_{2n}^{2n}\cdot\left[\left(\frac{lgx}{x^2}\right)^{\frac{1}{4n}}-1\right]^0\cdot 1^{2n}=$

$=\left[\left(\frac{lgx}{x^2}\right)^{\frac{1}{4n}}-1+1\right]^{2n}=\left(\frac{lgx}{x^2}\right)^{\frac{2n}{4n}}=\left(\frac{lgx}{x^2}\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{lgx}}{x}$ 1p

Ecuația devine $\frac{x}{1}\cdot\frac{\sqrt{lgx}}{x}=lgx \Leftrightarrow \sqrt{lgx}=lgx$. Notând cu $\sqrt{lgx}=t$, obținem $t^2=t \Rightarrow t_1=0$ *și* $t_2=1$ 1p

de unde $x_1=1$ *și* $x_2=10$, care corespund ($x\geq 1$). 1p

Subiectul 3.

a) Verificați că $\varepsilon=-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}$ este soluție a ecuației $x^2+x+1=0$.

b) Fie $z=(1+\varepsilon)\cdot(1+\varepsilon^2)\cdot(1+\varepsilon^3)\cdot(1+\varepsilon^4)\cdot\ldots\cdot(1+\varepsilon^{2023})$, unde $\varepsilon=-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}$. Determinați modulul numărului complex z.

c) Dacă $z_1, z_2, z_3\in\mathbb{C}^*$ îndeplinesc condițiile $|z_1\cdot z_2+z_2\cdot z_3+z_3\cdot z_1|=a,\ a>0$ și $|z_1\cdot z_2\cdot z_3|=b,\ b>0$, arătați că cel puțin unul dintre aceste numere are modulul mai mic sau cel mult egal cu $\frac{3b}{a}$.

SOLUȚIE:

a) ε este soluție a ecuației $x^2+x+1=0$ dacă $\varepsilon^2+\varepsilon+1=0 \Leftrightarrow \left(-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)+1=0$

sau rezolvarea ecuației în mulțimea numerelor complexe 1p

b) Înmulțind egalitatea $\varepsilon^2+\varepsilon+1=0$ cu $(\varepsilon-1)$ obținem $\varepsilon^3=1 \Rightarrow \varepsilon^{3k}=1, \varepsilon^{3k+1}=\varepsilon, \varepsilon^{3k+2}=\varepsilon^2$ 1p

Observăm că $2023=3\cdot 674+1 \Rightarrow z=(1+\varepsilon)\cdot(1+\varepsilon^2)\cdot(1+\varepsilon^3)\cdot(1+\varepsilon^4)\cdots(1+\varepsilon^{2023})$

$\Rightarrow z=(1+\varepsilon)^{674}\cdot(1+\varepsilon^2)^{674}\cdot 2^{674}\cdot(1+\varepsilon)=[(1+\varepsilon)\cdot(1+\varepsilon^2)]^{674}\cdot 2^{674}\cdot(1+\varepsilon)=2^{674}\cdot(1+\varepsilon)$ 1p

$\Rightarrow z=2^{674}\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}\right) \Rightarrow |z|=\left|2^{674}\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)\right|=2^{674}\cdot 1 \Rightarrow |z|=2^{674}$ 1p

c) Presupunem prin reducere la absurd că: $\begin{cases}|z_1|>\frac{3b}{a}\\ |z_2|>\frac{3b}{a}\\ |z_3|>\frac{3b}{a}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\frac{1}{|z_1|}<\frac{a}{3b}\\ \frac{1}{|z_2|}<\frac{a}{3b}\\ \frac{1}{|z_3|}<\frac{a}{3b}\end{cases} \Rightarrow \frac{1}{|z_1|}+\frac{1}{|z_2|}+\frac{1}{|z_3|}<\frac{a}{b}$; 1p

Dar $\frac{a}{b}=\frac{|z_1\cdot z_2+z_2\cdot z_3+z_3\cdot z_1|}{|z_1\cdot z_2\cdot z_3|}\leq\frac{|z_1z_2|+|z_1z_3|+|z_2z_3|}{|z_1\cdot z_2\cdot z_3|}=\frac{1}{|z_1|}+\frac{1}{|z_2|}+\frac{1}{|z_3|}<\frac{a}{b}$.

Obținem o inegalitate falsă: $\frac{a}{b}<\frac{a}{b}$. Deci există măcar un z_i, $i\in\{1,2,3\}$, pentru care $|z_i|\leq\frac{3b}{a}$. 2p

Subiectul 4.

Într-o stațiune turistică au fost construite Hotelurile Onix, Rubin și Smarald. De la Onix spre Rubin se parcurg 2 km spre est și apoi 1 km spre nord. De la Onix spre Smarald se parcurg 2 km spre vest și apoi 4 km spre nord. Urmează să se construiască un punct farmaceutic, aflat la distanțe egale față de cele trei hoteluri.

a) Aflați distanța de la farmacie la Hotelul Onix.

b) Precizați locul în care se va construi farmacia.

SOLUȚIE:

a) Alegem un sistem de axe de coordonate cu originea în O (Hotelul Onix), sensul de la O spre est fiind sensul pozitiv al axei Ox , iar sensul de la O spre nord fiind sensul pozitiv al axei Oy. Hotelul Rubin va fi reprezentat prin punctul $R(2;1)$, Hotelul Smarald va fi reprezentat prin punctul $S(-2;4)$, iar farmacia prin punctul $F(a;b)$, unde $a,b \in \mathbb{R}$. 1p
$OF=\sqrt{a^2+b^2}$, $RF=\sqrt{a^2+b^2-4a-2b+5}$, $SF=\sqrt{a^2+b^2+4a-8b+20}$ 1p
$OF=RF \Rightarrow 4a+2b=5$, iar din $OF=SF \Rightarrow a-2b=-5$ 1p
$\begin{cases}4a+2b=5\\a-2b=-5\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a=0\\b=\frac{5}{2}\end{cases} \Rightarrow F\left(0;\frac{5}{2}\right)$, $OF=\frac{5}{2}\ km$ 1p

b) $OF=RF=SF \Rightarrow F$ este centrul cercului circumscris ΔSOR. 1p
$m_{RO}=\frac{1}{2}$, $m_{SO}=-2 \Rightarrow m_{RO}\cdot m_{SO}=-1 \Rightarrow RO\perp SO \Rightarrow \Delta SOR$ este dreptunghic în O. 1p
Centrul cercului circumscris triunghiului dreptunghic este mijlocul ipotenuzei.
F este mijlocul segmentului $[SR]$. 1p