CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

ETAPA NAȚIONALĂ
13 mai 2023

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE
Clasa a X –a – Secțiunea H2 – Profil Științe ale Naturii

Subiectul 1.

Se consideră numărul complex $z=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}$.

a) Arătați că $z^2+z+1\in\mathbb{N}$.

b) Dacă $z^{2023}=a+i\sqrt{3}\cdot b$, unde $a,b\in\mathbb{Q}$, arătați că $a^2+3b^2=1$.

c) Demonstrați că are loc egalitatea: $C_{2023}^0+C_{2023}^3+C_{2023}^6+...+C_{2023}^{2022}=\frac{1}{3}\left(2^{2023}+1\right)$.

SOLUȚIE:

a) Se obține $z^2+z+1=0\in\mathbb{N}$ 1p

b) Se obține relația $z^3=1$, de unde se deduce $z^{2023}=\left(z^3\right)^{674}\cdot z=1\cdot z=z$ 1p

Din $z^{2023}=a+i\sqrt{3}\cdot b\Rightarrow\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}=a+i\sqrt{3}\cdot b\Rightarrow -\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}=a+i\sqrt{3}\cdot b,\ a,b\in\mathbb{Q}\Rightarrow a=-\frac{1}{2},\ b=\frac{1}{2}$ de unde se obține $a^2+3b^2=\frac{1}{4}+\frac{3}{4}=1$ 1p

c) Cum $(1+x)^{2023}=C_{2023}^0+C_{2023}^1x+C_{2023}^2x^2+...+C_{2023}^{2022}x^{2022}+C_{2023}^{2023}x^{2023}$, rezultă succesiv că, pentru $x=1$, $x=z$ și $x=z^2$ se obține:

$2^{2023}=C_{2023}^0+C_{2023}^1+C_{2023}^2+...+C_{2023}^{2022}+C_{2023}^{2023}$, $(1+z)^{2023}=C_{2023}^0+C_{2023}^1z+C_{2023}^2z^2+...+C_{2023}^{2022}z^{2022}+C_{2023}^{2023}z^{2023}$ și $\left(1+z^2\right)^{2023}=C_{2023}^0+C_{2023}^1z^2+C_{2023}^2z^4+...+C_{2023}^{2022}z^{4044}+C_{2023}^{2023}z^{4046}$, iar prin adunarea celor trei relații rezultă că

$2^{2023}+(1+z)^{2023}+\left(1+z^2\right)^{2023}=3\left(C_{2023}^0+C_{2023}^3+C_{2023}^6+...+C_{2023}^{2022}\right)$ 2p

Din a) și b) avem $z^2+z+1=0\Rightarrow(1+z)^{2023}=\left(-z^2\right)^{2023}=-z^{4046}=-z^2$ și $\left(1+z^2\right)^{2023}=(-z)^{2023}=-z^{2023}=-z$ 1p

Se obține $3\left(C_{2023}^0+C_{2023}^3+C_{2023}^6+...+C_{2023}^{2022}\right)=2^{2023}-\left(z^2+z\right)=2^{2023}+1$, deci are loc relația

$C_{2023}^0+C_{2023}^3+C_{2023}^6+...+C_{2023}^{2022}=\frac{1}{3}\left(2^{2023}+1\right)$ 1p

Subiectul 2.

a) Arătați că funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=25^{x}+\log_{25}x$ este injectivă.

b) Rezolvați ecuația $25^{x^{2025}}+\log_{25}x^{2023}=25^{x^{2}}$, $x\in(0,\infty)$.

c) Demonstrați că pentru orice numere $x,y\in(0,\infty)$ are loc inegalitatea $625^{\lg^2 x+\lg x\cdot\lg y+\lg y}+625^{\lg^2 y+\lg x\cdot\lg y+\lg x}\geq\frac{2}{\sqrt{5}}$.

SOLUȚIE:

a) Cum *f* este sumă de funcții strict crescătoare $\Rightarrow$ *f* este strict crescătoare, prin urmare este injectivă 1p

b) $25^{x^{2025}}+\log_{25}x^{2023}=25^{x^{2}}\Leftrightarrow 25^{x^{2025}}+\log_{25}x^{2025}-\log_{25}x^{2}=25^{x^{2}}\Leftrightarrow 25^{x^{2025}}+\log_{25}x^{2025}=25^{x^{2}}+\log_{25}x^{2}\Leftrightarrow$ 1p

$f\left(x^{2025}\right)=f\left(x^{2}\right)$, cum *f* este injectivă $\Rightarrow x^{2025}=x^{2}\Leftrightarrow x^{2023}=1$, deci $x=1\in(0,\infty)$ 2p

c) Din inegalitatea mediilor, se obține

$625^{\lg^2 x+\lg x\cdot\lg y+\lg y}+625^{\lg^2 y+\lg x\cdot\lg y+\lg x}\geq 2\sqrt{625^{\lg^2 x+\lg x\cdot\lg y+\lg y+\lg^2 y+\lg x\cdot\lg y+\lg x}}=2\cdot 25^{\lg^2 x+2\lg x\cdot\lg y+\lg^2 y+\lg x+\lg y}=$ 1p

$=2\cdot 25^{(\lg x+\lg y)^2+(\lg x+\lg y)+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}}=2\cdot 25^{\left(\lg x+\lg y+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}}\geq$ 1p

$\geq 2\cdot 25^{-\frac{1}{4}}=2\cdot\left(5^{2}\right)^{-\frac{1}{4}}=\frac{2}{\sqrt{5}}$ 1p

Subiectul 3.

a) Arătați că $\sqrt{2n+2\sqrt{n^2-1}}=\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1},\ \forall n\in\mathbb{N}^*$.

b) Fie $S_n=1+\frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}+\frac{1}{\sqrt{3+\sqrt{8}}}+...+\frac{1}{\sqrt{n+\sqrt{n^2-1}}},\forall n\in\mathbb{N}^*$. Găsiți cel mai mare număr natural nenul *n*, pentru care $S_n<5\sqrt{2}$.

c) Demonstrați că $\frac{3}{\sqrt{2}}\cdot\frac{5}{\sqrt{6}}\cdot\frac{7}{\sqrt{12}}\cdot...\cdot\frac{201}{\sqrt{10100}}>1+2+2^2+...+2^{99}$.

SOLUȚIE:

a) Verificarea directă $\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}\right)^2=2n+2\sqrt{n^2-1}$, de unde concluzia 1p

b) $\frac{1}{\sqrt{k+\sqrt{k^2-1}}}=\frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{k+1}-\sqrt{k-1}\right)}{2}$ 1p

Se obține $S_n=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{2}-\sqrt{0}+\sqrt{3}-\sqrt{1}+\sqrt{4}-\sqrt{2}+...+\sqrt{n}-\sqrt{n-2}+\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}-1\right)$..1p

Cum $S_n<5\sqrt{2}\Rightarrow\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}-1\right)<5\sqrt{2}\Rightarrow\sqrt{n+1}+\sqrt{n}<2\sqrt{n+1}<11$. Se obține $n=29$ 1p

c) Cum $\sqrt{ab}\leq\frac{a+b}{2},\forall a,b>0\Leftrightarrow\frac{a+b}{\sqrt{ab}}\geq 2$, $a,b\in(0,\infty)$..1p

Astfel, se obține $\frac{3}{\sqrt{2}}\cdot\frac{5}{\sqrt{6}}\cdot\frac{7}{\sqrt{12}}\cdot...\cdot\frac{201}{\sqrt{10100}}\geq\underbrace{2\cdot 2\cdot...\cdot 2}_{100\ de\ factori}=2^{100}$ 1p

Dar $1+2+2^2+...+2^{99}=2^{100}-1\Rightarrow\frac{3}{\sqrt{2}}\cdot\frac{5}{\sqrt{6}}\cdot\frac{7}{\sqrt{12}}\cdot...\cdot\frac{201}{\sqrt{10100}}>1+2+2^2+...+2^{99}$ 1p

Subiectul 4.

La un turneu de tenis au participat de două ori mai mulți băieți decât fete. Fiecare pereche de participanți a jucat exact o dată și nu au fost rezultate egale. Raportul dintre numărul victoriilor obținute de fete și numărul victoriilor obținute de băieți a fost $7:5$. Câți participanți au fost la acest turneu?

SOLUȚIE:

Notând cu n numărul fetelor $\Rightarrow$ *2n* este numărul băieților și *3n* este numărul de participanți 1p

Se obține $C_{3n}^{2}=\dfrac{(3n-1)\cdot 3n}{2}$ numărul total al meciurilor 1p

Din $\dfrac{v_f}{v_b}=\dfrac{7}{5}\Rightarrow\dfrac{v_f+v_b}{v_b}=\dfrac{12}{5}$, dar $v_f+v_b=C_{3n}^{2}\Rightarrow v_b=\dfrac{5n(3n-1)}{8}$ este numărul victoriilor obținute de băieți 1p

Dar $C_{2n}^{2}=n(2n-1)$ este numărul meciurilor jucate de băieți 1p

Meciurile jucate între băieți sunt considerate ca victorii ale băieților $\Rightarrow\dfrac{5n(3n-1)}{8}\geq n(2n-1)\Rightarrow n\leq 3$ 1p

Cum $\dfrac{5n(3n-1)}{8}\in\mathbb{N}\Rightarrow 8/5n(3n-1)$ 1p

Prin verificare se obține $n=3\Rightarrow 3n=9$ participanți 1p