CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA NAȚIONALĂ
13 mai 2023

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE
Clasa a XI–a – Secțiunea H1 – Filieră tehnologică

Subiectul 1.

În mulțimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ și $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Arătați că $tr(A^2) = tr^2(A) - 2\,det\,(A)$.

b) Demonstrați că dacă $A \neq \pm I_2$, atunci $A^2 = I_2$ dacă și numai dacă $tr(A) = 0$ și $det(A) = -1$.

SOLUȚIE:

a) $A^2 = \begin{pmatrix} a^2 + bc & b(a+d) \\ c(a+d) & d^2 + bc \end{pmatrix}$ ………………………… **1 p**

$tr(A^2) = a^2 + d^2 + 2bc = (a+d)^2 - 2(ad - bc) = tr^2(A) - 2\,det\,(A)$ ………………………… **1 p**

b) $\Rightarrow$: Din $A^2 = I_2$ obținem $c(a+d) = b(a+d) = 0$ ………………………… **1 p**

<u>*Cazul* 1:</u>

Pentru $b = c = 0$, avem $A^2 = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & d^2 \end{pmatrix} = I_2 \Rightarrow a^2 = d^2 = 1.$ Deoarece $A \neq \pm I_2$, a și d nu pot fi simultan 1 sau -1, deci $a = 1, d = -1$ sau $a = -1, d = 1$, iar $tr(A) = 0$ și $det(A) = -1$ ………………………… **1p**

<u>*Cazul* 2:</u>

Dacă $a + d = 0 \Rightarrow d = -a$, deci $A^2 = \begin{pmatrix} a^2 + bc & 0 \\ 0 & a^2 + bc \end{pmatrix} = I_2 \Rightarrow a^2 + bc = 1 \Rightarrow$

$det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & -a \end{vmatrix} = -a^2 - bc = -1$ și $tr(A) = a + d = 0$ ………………………… **1p**

$\Leftarrow$: Din $a + d = 0$ și $ad - bc = -1$ obținem $d = -a$, deci $a^2 + bc = d^2 + bc = 1$ ………………………… **1p**

Deci $A^2 = \begin{pmatrix} a^2 + bc & b(a+d) \\ c(a+d) & d^2 + bc \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & b \cdot 0 \\ c \cdot 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$,

Iar din $d = -a \Rightarrow A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \neq \pm I_2$ ………………………… **1p**

Subiectul 2.

La o oră de matematică profesorul alege o matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ astfel încât $A^2 = I_2$. Trei elevi aleg fiecare câte o matrice X, Y respectiv Z din $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ astfel încât acestea să verifice relațiile (R) $X = Y + Z\,; YA = Y; ZA = -Z$.

a) Arătaţi că matricele *Y* şi *Z*, unde $Y = \frac{1}{2}(X + XA)$ şi $Z = \frac{1}{2}(X - XA)$ verifică relaţiile (R);

b) Verificaţi dacă, după ce profesorul şi primul elev au ales matricile *A* respectiv *X*, următorii 2 elevi pot alege şi alte matrici *Y* şi *Z* în afară de cele precizate la punctul a).

SOLUŢIE:

a) Verifică $Y + Z = \frac{1}{2}(X + XA) + \frac{1}{2}(X - XA) = \frac{1}{2}(X + XA + X - XA) = \frac{1}{2} \cdot 2X = X$ **1p**

Verifică $YA = \frac{1}{2}(X + XA)A = \frac{1}{2}(XA + XA^2) = \frac{1}{2}(XA + X \cdot I_2) = \frac{1}{2}(XA + X) = Y$ **1p**

Verifică $ZA = \frac{1}{2}(X - XA)A = \frac{1}{2}(XA - XA^2) = \frac{1}{2}(XA - X \cdot I_2) = \frac{1}{2}(XA - X) = -\frac{1}{2}(X - XA) = -Z$ **1p**

b) Pentru *A*, *X* fixate, considerăm perechea de matrici Y' *şi* Z' din $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, care să verifice relațiile (R), deci avem $X = Y' + Z'$ (1); $Y'A = Y'$ (2); $Z'A = -Z'$ (3)..............................**1p**

Avem, de asemenea : $X = Y + Z$ (1′); $YA = Y$ (2′); $ZA = -Z$ (3′) (*Y* şi *Z* fiind matricile de la a)) .

Din (1) şi (1') deduce $Y + Z = Y' + Z' \Leftrightarrow Y - Y' = Z' - Z \Leftrightarrow Y - Y' = -(Z - Z') \quad (*)$

Din (2) şi (2') deduce $YA - Y'A = Y - Y' \Leftrightarrow (Y - Y')A = Y - Y' = \left(conf\ (*)\right) = -(Z - Z')$ **1p**

Înmulțim cu *A*, la dreapta, relația obținută vom găsi:

$$(YA - Y'A)A = -(Z - Z')A \Leftrightarrow (Y - Y')A \cdot A = -ZA + Z'A \Leftrightarrow (Y - Y')A^2 = -ZA + Z'A \overset{(3),(3')}{\Leftrightarrow}$$

$$(Y - Y') \cdot I_2 = Z - Z' \Leftrightarrow Y - Y' = Z - Z' \ (**)$$ **1p**

Din $(*)$ *şi* $(**)$ deduce $Y - Y' = O_2$ şi $Z - Z' = O_2$ deci $Y = Y'$ *şi* $Z = Z'$ adică elevii pot alege doar matricile *Y* şi *Z* precizate la punctul a) dacă matricele *A* şi *X* au fost fixate..............................**1p**

Subiectul 3.

Se consideră funcția $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{2x+3}{\sqrt{x^2+1}}$.

a) Arătați că $f'(x)\sqrt{x^2+1} = \frac{2-3x}{x^2+1}$, pentru orice număr real x.

b) Determinați abscisa punctului situat pe graficul funcției f, în care tangenta la graficul funcției f este perpendiculară pe axa Oy.

c) Determinați imaginea funcției *f*.

SOLUŢIE:

a) $f'(x) = \frac{2-3x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$ .... **1 p**

Finalizare .... **1 p**

b) Tangenta la graficul funcției f în punctul $(a, f(a))$ este perpendiculară pe axa $Oy \Leftrightarrow f'(a) = 0$..............**1p**

$2 - 3a = 0 \Leftrightarrow a = \frac{2}{3}$ **1p**

c) $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}\,; f'(x) \geq 0$, pentru orice $x \in \left(-\infty; \frac{2}{3}\right]$ deci f este crescătoare pe $\left(-\infty; \frac{2}{3}\right]$;

$f'(x) \leq 0$, pentru orice $x \in \left[\frac{2}{3}; +\infty\right)$, deci f este descrescătoare pe $\left(-\infty; \frac{2}{3}\right]$ **1p**

f continua pe $\mathbb{R}$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -2$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$ **1p**

$f(x) \leq f\left(\frac{2}{3}\right)$; $f\left(\frac{2}{3}\right) = \sqrt{13}$; deci obţinem $Imf = \left(-2, \sqrt{13}\ \right]$ **1p**

Subiectul 4.

La fiecare moment $t > 0$ (exprimat în ore), volumul de apă (măsurat în m^3) cu care o instalaţie alimentează un bazin este exprimat prin legea $C(t) = 2(t+1) + \ln(t+1) - 2\sqrt{t+1}$.

Pentru a funcţiona la parametri optimi, instalaţia este prevăzută cu un senzor care opreşte alimentarea bazinului atunci când debitul apei atinge valoarea sa minimă. Se ştie că că debitul apei este dat de funcţia $D(t) = C'(t)(m^3/oră)$.

a) Să se determine debitul apei la momentul $t = 15$ minute al funcționării instalaţiei.

b) Să se stabilească momentul la care senzorul opreşte alimentarea bazinuluiui şi debitul apei în acel moment.

SOLUŢIE:

a) $D(t) = C'(t) = \left(2t+2+\ln(t+1) - 2\sqrt{t+1}\right)' = 2 + \frac{1}{t+1} - \frac{1}{\sqrt{t+1}}$ **1p**

La momentul $t = 15\,\text{min} = \frac{1}{4}$ ore, debitul va fi $D\left(\frac{1}{4}\right) = 1,90\ m^3/oră$ **1p**

b) $D'(t) = \left(\frac{1}{t+1}\right)' - \left(\frac{1}{\sqrt{t+1}}\right)' = -\frac{1}{(t+1)^2} + \frac{1}{2(t+1)\sqrt{t+1}} = \frac{t+1-2\sqrt{t+1}}{2(t+1)^2\sqrt{t+1}}$ **1p**

Senzorul opreşte instalaţia la debit minim adică la un punct de minim al funcţiei $D(t)$.

Pentru aflarea acestuia rezolvăm ecuaţia $D'(t) = 0$ şi găsim $t+1-2\sqrt{t+1} = 0$ **1p**

Întocmeşte tabelul de variaţie al funcției (sau precizează intervalele de monotonie)..**1p**

Obține $t = 3$ ore punct de minim, deci este momentul când senzorul va opri instalaţia **1p**

La acel moment debitul atinsese valoarea $D(3) = \frac{7}{4}$ **1p**

.