INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

ETAPA NAȚIONALĂ
13 mai 2023

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE
Clasa a XI –a – Secțiunea H2 – Specializarea Științe ale Naturii

Subiectul 1.

Se consideră matricele $A,B\in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ satisfăcând condițiile $A+B=I_n$ și $A^3=A^2$.

a) Arătați că $AB=BA$.

b) Arătați că $A^2+B^2=(A+iB)(A-iB)$ și $\det(A^2+B^2)\geq 0$.

c) Arătați că rangul matricei $A+B$ este egal cu *n*.

d) Arătați că $A^2B^2=O_n$ și demonstrați că matricea I_n+AB este inversabilă. Calculați inversa acestei matrice.

SOLUŢIE:

a) Cum $A+B=I_n \Rightarrow A^2+AB=A$ și $A^2+BA=A$. Se obține $AB=BA$ 1p

b) $(A+iB)(A-iB)=A^2-iAB+iBA+B^2=(conf\ a)A^2+B^2$ 1p

Se obține $\det(A^2+B^2)=\det[(A+iB)(A-iB)]=\det(A+iB)\cdot\det(A-iB)=$

$=\det(A+iB)\cdot\overline{\det(A+iB)}=\left|\det(A+iB)\right|^2\geq 0$ 1p

c) Cum $A+B=I_n$ avem $\det(A+B)=1\neq 0\Rightarrow rang(A+B)=n$ 2p

d) Cum $A+B=I_n\Rightarrow B=I_n-A\Rightarrow B^2=I_n-2A+A^2\Rightarrow A^2B^2=A^2(I_n-2A+A^2)=$

$=A^2-2A^2+A^4=A^2-2A^2+A^2=O_n$ 1p

Se obține $(I_n+AB)(I_n-AB)=I_n-AB+AB-ABAB=(conf\ a)=I_n-A^2B^2=I_n$.

Rezultă că $\det(I_n+AB)\neq 0\Rightarrow I_n+AB$ este matrice inversabilă și $(I_n+AB)^{-1}=I_n-AB$ 1p

Subiectul 2.

Să se determine funcția continuă $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ care verifică relația $f(2x)-f(x)=x$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$.

SOLUȚIE:

Înlocuind x cu $\frac{x}{2}$ se obține $f(x)-f\left(\frac{x}{2}\right)=\frac{x}{2}$ 1p

Înlocuiește din nou x cu $\frac{x}{2}$ și repetă procedeul. Se obține $f\left(\frac{x}{2}\right)-f\left(\frac{x}{4}\right)=\frac{x}{4}$, ... , $f\left(\frac{x}{2^{n-1}}\right)-f\left(\frac{x}{2^n}\right)=\frac{x}{2^n}$ și adună relațiile $\Rightarrow f(x)-f\left(\frac{x}{2^n}\right)=x\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+...+\frac{1}{2^n}\right)$ 2p

Calculează $f(x)-f\left(\frac{x}{2^n}\right)=x\left(1-\frac{1}{2^n}\right)$ 1p

Trece la limită în relația $f(x)=f\left(\frac{x}{2^n}\right)+x\left(1-\frac{1}{2^n}\right)$ 1p

Obține $f(x)=f(0)+x$ 1p

Finalizare $f(x)=x+a$, unde $a=f(0)\in\mathbb{R}$ 1p

Subiectul 3.

a) Rezolvați sistemul de ecuații $\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 1 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \\ -x_2 + 2x_3 - x_4 = 3 \\ -x_3 + 2x_4 = 4 \end{cases}$ cu necunoscutele $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}$.

b) Fie sistemul cu necunoscutele $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N},\ n > 3$, $\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 1 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \\ -x_2 + 2x_3 - x_4 = 3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ -x_{n-2} + 2x_{n-1} - x_n = n-1 \\ -x_{n-1} + 2x_n = n \end{cases}$ și fie Δ_n determinantul matricei sistemului.

i) Arătați că $\Delta_n = 2\Delta_{n-1} - \Delta_{n-2},\ n \in \mathbb{N},\ n > 3$.

ii) Demonstrați că sistemul este compatibil determinat.

iii) Aflați x_1 și x_n.

SOLUȚIE:

a) $\det(A) = 5 \neq 0 \Rightarrow$ sistemul este compatibil determinat. Soluția $S = \{(4,7,8,6)\}$ 1p

b) i) $\Delta_n = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}$. Se dezvoltă Δ_n după prima linie și se obține

$$\Delta_n = 2 \cdot \Delta_{n-1} + (-1) \cdot (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$ 1p

Se folosește dezvoltarea după prima coloană și se obține $\Delta_n = 2\Delta_{n-1} - \Delta_{n-2},\ n \in \mathbb{N},\ n > 3$ 1p

ii) $\Delta_n - \Delta_{n-1} = \Delta_{n-1} - \Delta_{n-2},\ n > 3 \Rightarrow (\Delta_n)$ progresie aritmetică 1p

$\Delta_1 = 2,\ r = 1,\ \Delta_n = n + 1 \neq 0, \forall n > 3 \Rightarrow$ sistemul este compatibil determinat 1p

iii) Se adună ecuațiile sistemului și se obține $x_1 + x_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ 1p

Înmulțind prima ecuație cu 1, a doua cu 2, a treia cu 3, ... , a *n*- a cu *n* și, adunându-le, se obține:

$(2n - (n-1))x_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2$, de unde rezultă că $x_n = \dfrac{n(2n+1)}{6}$ și $x_1 = \dfrac{n(n+2)}{6}$ 1p

Subiectul 4.

Două mobile M_1 și M_2 se deplasează plecând în același timp din același punct. Distanța parcursă de cele două mobile în funcție de timpul *t* este $s_1(t) = \dfrac{mt}{t^2 - mt + m^2}$, $m > 0$, respectiv $s_2(t) = -t^2 + 5t$. Timpul este măsurat în minute și distanța în metri.

a) Determinați *m* știind că, după 3 minute, mobilul M_1 se află la distanță maximă față de punctul de plecare.

b) Pentru $m = 3$, arătați că cele două mobile se întâlnesc într-un moment $t_0 \in (4,5)$.

c) Pentru $m = 3$, stabiliți momentul în care mobilul M_1 are accelerație maximă în timpul deplasării și determinați viteza lui în acest moment.

SOLUȚIE:

a) Cum $s_1'(3) = 0$ și $s_1'(t) = \dfrac{-mt^2 + m^3}{\left(t^2 - mt + m^2\right)^2}$ 1p

Rezultă $m = 3$ 1p

b) $s_1(t) = s_2(t) \Rightarrow \dfrac{3t}{t^2 - 3t + 9} = -t^2 + 5t \Rightarrow -t^3 + 8t^2 - 24t + 42 = 0$ 1p

Fie $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}, f(t) = -t^3 + 8t^2 - 24t + 42$ continuă pe $[0,\infty)$. Cum $f(4) > 0, f(5) < 0$ rezultă că ecuația $f(t) = 0$ are cel puțin o soluție în intervalul $(4,5)$ și deci cele două mobile se întâlnesc în intervalul de timp $(4,5)$.

..........1p

c) $v_1(t) = s_1'(t),\ a_1(t) = v_1'(t) = s_1''(t)$.

$v_1(t) = \dfrac{-3t^2 + 27}{\left(t^2 - 3t + 9\right)^2},\ a_1(t) = \dfrac{6t^3 - 162t + 162}{\left(t^2 - 3t + 9\right)^3}$ 1p

$a_1'(t) = \dfrac{-18t^4 + 972t^2 - 1944t}{\left(t^2 - 3t + 9\right)^4}$. Ecuația $a_1'(t) = 0$ are în intervalul $(0,\infty)$ soluțiile $t_1 = 3\sqrt{3} - 3,\ t_2 = 6$.

Cum a_1 este strict crescătoare pe $\left[3\sqrt{3} - 3, 6\right]$ și strict descrescătoare pe intervalele $\left[0, 3\sqrt{3} - 3\right]$ și respectiv, $[6,\infty)$ avem $a_1(0) = \dfrac{2}{9},\ a_1(6) = \dfrac{2}{81}$ și rezultă că $t_0 = 6$ este punct de maxim 1p

Deci, la momentul $t = 6$ minute, mobilul M_1 are accelerație maximă, iar $|v_1(6)| = \left|-\dfrac{1}{9}\right| = 0,(1)\ m/s$ 1p