MINISTERUL EDUCAȚIEI

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA NAȚIONALĂ
13 mai 2023

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE
Clasa a XII–a – Secțiunea H1 – Filieră tehnologică

Subiectul 1. Se consideră mulțimea $G=\left(\frac{9}{2},+\infty\right)$. Definim $x\circ y=\frac{xy-20}{x+y-9}$, oricare ar fi $x,y\in G$.

a) Arătați că „$\circ$” este lege de compoziție internă pe G.
b) Determinați perechile de numere naturale $(m,n)\in G\times G$, pentru care $m\circ n=7$.
c) Calculați $\log_2 25\circ\log_2 26\circ\ldots\circ\log_2 2023$.

SOLUȚIE: a) Deoarece $x+y-9>0,\forall x,y\in\left(\frac{9}{2},+\infty\right)$, avem: $x\circ y\in G\Leftrightarrow\frac{xy-20}{x+y-9}>\frac{9}{2}\Leftrightarrow 2xy-40>9x+9y-81\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4xy-18x-18y+82>0\Leftrightarrow(2x-9)(2y-9)+1>0$, inegalitate adevărată pentru orice $x,y\in\left(\frac{9}{2},+\infty\right)$. **3p**

b) Avem: $m\circ n=7\Leftrightarrow mn-20=7m+7n-63\Leftrightarrow(m-7)(n-7)=6$. Obținem $(m,n)\in\{(8,13),(9,10),(10,9),(13,8)\}$. **2p**

c) Observăm că $x\circ 5=5\circ x=5$, oricare ar fi $x\in G$. Cum operația „$\circ$” este asociativă și $\log_2 32=5$, rezultă că $\log_2 25\circ\log_2 26\circ\ldots\circ\log_2 2023=(\log_2 25\circ\ldots\circ\log_2 31)\circ\log_2 32\circ(\log_2 33\circ\ldots\circ\log_2 2023)=\alpha\circ 5\circ\beta=5$. **2p**

Subiectul 2. Se consideră polinomul $f\in\mathbb{R}[X]$, $f=2X^4-X^3-X+2$.

a) Arătați că există două numere reale a și b astfel încât $f=(X^2+aX+1)(2X^2+bX+2)$.
b) Demonstrați că toate rădăcinile polinomului f au modulul egal cu 1.

SOLUȚIE: a) Desfacem parantezele și identificăm coeficienții; obținem $ab=-4$ și $2a+b=-1$. **1p**
Înlocuind $b=-1-2a$ în prima ecuație, avem $2a^2+a-4=0$, ecuație de gradul al doilea cu discriminantul $\Delta=33>0$. Prin urmare, există numere reale a și b cu proprietățile cerute. **2p**

b) Rădăcinile lui f sunt soluțiile ecuațiilor $x^2+ax+1=0$, respectiv $x^2+\frac{b}{2}x+1=0$. Cum $a\in(-2,2)$ și $\frac{b}{2}\in(-2,2)$, cele două ecuații au discriminanții negativi, așadar $x_{1,2,3,4}\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$. **2p**

Avem: $x_{1,2}=-\frac{a}{2}\pm i\frac{\sqrt{4-a^2}}{2}$, deci $|x_1|=|x_2|=\sqrt{\frac{a^2}{4}+\frac{4-a^2}{4}}=1$ și, analog, $|x_3|=|x_4|=1$. **2p**

Subiectul 3. Se consideră funcțiile $f:[1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{x(2+\ln x)(3+\ln x)}$ și $F:[1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $F(x)=\int\limits_1^x f(t)dt$.

a) Arătați că $F(x)=\ln\dfrac{2+\ln x}{3+\ln x}+\ln\dfrac{3}{2}$, oricare ar fi $x\ge 1$.

b) Demonstrați că $\dfrac{e^2-e}{20}\le\int\limits_e^{e^2} xf(x)dx\le\dfrac{e^2-e}{12}$.

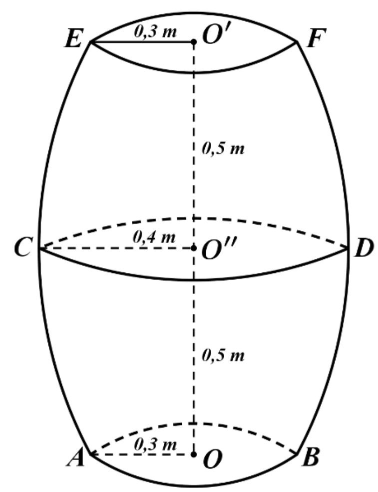
SOLUȚIE: a) Cu schimbarea de variabilă $u=\ln t$, integrala $\int f(t)dt$ devine $\int\dfrac{1}{(2+u)(3+u)}du=\int\dfrac{(3+u)-(2+u)}{(3+u)(2+u)}du=$

$=\int\left(\dfrac{1}{2+u}-\dfrac{1}{3+u}\right)du=\ln\dfrac{2+u}{3+u}+C$, prin urmare $\int f(t)dt=\ln\dfrac{2+\ln t}{3+\ln t}+C$. **3p**

Cum F se anulează în $x=1$, rezultă că $F(x)=\ln\dfrac{2+\ln x}{3+\ln x}+\ln\dfrac{3}{2}$, $\forall x\ge 1$. **1p**

b) Funcția $x\mapsto xf(x)$ este descrescătoare pe $\left[e,e^2\right]$, deci $e^2f(e^2)\le xf(x)\le ef(e)$, așadar $\dfrac{1}{20}\le xf(x)\le\dfrac{1}{12}$. Deducem că $\dfrac{e^2-e}{20}\le\int\limits_e^{e^2} xf(x)dx\le\dfrac{e^2-e}{12}$. **3p**

Subiectul 4. În figura alăturată este reprezentat un butoi cu înălțimea $OO'=1$m, razele bazelor $OA=O'E=0,3$ m și secțiunea maximală paralelă cu bazele (prin mijlocul înălțimii) de rază $O''C=0,4$ m. Generatoarele (*AE*, *BF* etc.) sunt arce de parabolă.

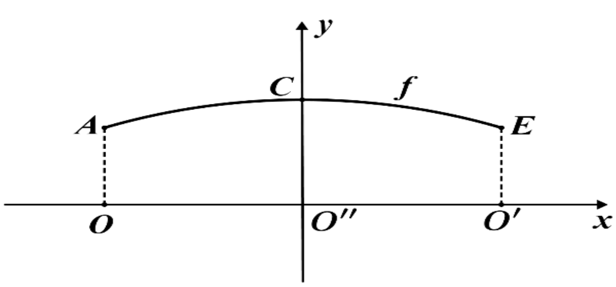


a) Calculați volumul aproximativ al butoiului (în litri) folosind formula lui Simpson $\mathcal{V}=\dfrac{h}{6}(\mathcal{A}_1+4\mathcal{A}_2+\mathcal{A}_3)$, unde h este înălțimea, $\mathcal{A}_1$ este aria bazei inferioare, $\mathcal{A}_2$ este aria secțiunii paralelă cu bazele care trece prin mijlocul înălțimii, iar $\mathcal{A}_3$ este aria bazei superioare.

b) Arătați că volumul exact al butoiului este $\dfrac{406\pi}{3}$ litri.

SOLUȚIE: a) $V=\dfrac{10}{6}\left(9\pi+4\cdot 16\pi+9\pi\right)=\dfrac{410\pi}{3}$ litri (cam 429,13 litri). **2p**

b) Ca în figura de mai jos, butoiul se poate obține prin rotirea arcului de parabolă AE în jurul axei Ox. **2p**



Fie $f:[-5,5]\to\mathbb{R}$, $f(x)=ax^2+bx+c$ funcția de gradul al doilea având drept grafic arcul de parabolă AE. Cum $A(-5,3), C(0,4)$ și $E(5,3)$ aparțin G_f, obținem că $25a-5b+c=3$, $c=4$, respectiv $25a+5b+c=3$. Astfel, $f(x)=-\dfrac{1}{25}x^2+4$. **2p**

Atunci $V=\pi\int\limits_{-5}^{5} f^2(x)dx=2\pi\int\limits_0^5\left(\dfrac{1}{625}x^4-\dfrac{8}{25}x^2+16\right)dx=2\pi\left(\dfrac{1}{625}\cdot\dfrac{x^5}{5}-\dfrac{8}{25}\cdot\dfrac{x^3}{3}+16x\right)\Bigg|_0^5=\dfrac{406\pi}{3}$ litri. **1p**