MINISTERUL EDUCAȚIEI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

ETAPA NAȚIONALĂ
13 mai 2023

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE
Clasa a XII –a – Secțiunea H2 – Specializarea Științe ale Naturii

Subiectul 1.

Într-un reper cartezian, xOy, două puncte A și B se numesc f – conectate dacă au coordonate întregi și există un polinom $f \in \mathbb{Z}[X]$ astfel încât graficul funcției polinomiale f conține punctele A și B.

a) Dacă f este un polinom cu coeficienți întregi și $a, b \in \mathbb{Z}, a \neq b$, arătați că $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ este număr întreg.

b) Considerăm $f = X^3 - 2023X^2 - 2024X + 1$ și punctele $A(-1,1)$ și $B(0,1)$. Arătați că A și B sunt f – conectate.

c) Arătați că nu există $f \in \mathbb{Z}[X]$ astfel încât $A(-2,3)$ și $B(3,-5)$ să fie f – conectate.

d) Găsiți un polinom $f \in \mathbb{Z}[X]$ astfel încât punctele $A(2023, 2024)$ și $B(2024, 2023)$ să fie f – conectate.

e) Fie $a, b, c \in \mathbb{Z},\ a < b < c$ și punctele $A(a,b), B(b,c)$ și $C(c,a)$. Arătați că nu există $f \in \mathbb{Z}[X]$ astfel încât punctele A și B să fie f – conectate, iar punctul C să fie pe graficul funcției f.

SOLUȚIE:

a) Fie $f(x) = a_0x^n + \cdots + a_{n-1}x + a_n$. Cum $\frac{a^n-b^n}{a-b} \in \mathbb{Z} \Rightarrow$
$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = a_0\frac{b^n-a^n}{b-a} + a_1\frac{b^{n-1}-a^{n-1}}{b-a} + \cdots + a_{n-1}\frac{b-a}{b-a} \in \mathbb{Z}$ 2p

b) $f(-1) = 1, f(0) = 1, f \in \mathbb{Z}[X] \Rightarrow$ concluzia 1p

c) Prin absurd, dacă A, B sunt f – conectate $\Rightarrow f(-2) = 3$ și $f(3) = -5 \Rightarrow \frac{f(3)-f(-2)}{3-(-2)} \in \mathbb{Z} \Rightarrow \frac{-8}{5} \in \mathbb{Z}\ fals \Rightarrow$ *concluzia* 2p

d) De exemplu $f = -X + 4047$ 1p

e) Dacă există $f \in \mathbb{Z}[X]$ cu $f(a) = b; f(b) = c; f(c) = a \Rightarrow \frac{f(c)-f(a)}{c-a} = \frac{a-b}{c-a} \in \mathbb{Z} \Rightarrow \frac{b-a}{c-a} \in \mathbb{N}^* \Rightarrow$
$b - a \geq c - a \Rightarrow b \geq c$, fals. 1p

Subiectul 2.

La o editură prețul unei cărți de matematică a fost modelat prin formula $P(f) = (40 - \int_0^1 f^2(x)dx)$ lei unde f este o funcție din mulțimea $M = \left\{f: [0,1] \to \mathbb{R}, f \text{ continuă și } \int_0^1 f(x)dx = 0;\ \int_0^1 xf(x)dx = 1\right\}$.

a) Verificați dacă funcția $f_0: [0,1] \to \mathbb{R}$, $f_0(x) = 12x - 6$ este din mulțimea M. Calculați $\int_0^1 f_0^2(x)dx$.

b) Arătați că M are o infinitate de elemente.

c) Demonstrați că, pentru orice $f \in M$ avem $\int_0^1 f^2(x)dx \geq 24\int_0^1 xf(x)dx - 12$.

d) Pentru ce funcție $f \in M$ prețul cărții este maxim și care este acesta?

SOLUȚIE:

a) f_0 funcție continuă și verifică condițiile cerute 1p
$\int_0^1 f_0^2(x)dx = 36\int_0^1 (2x-1)^2dx = 12$ 1p

b) Căutăm $f: [0,1] \to \mathbb{R}, f(x) = ax^2 + bx + c$, deducem $\frac{a}{3} + \frac{b}{2} + c = 0$ și $\frac{a}{4} + \frac{b}{3} + \frac{c}{2} = 1$ 1p
$f(x) = ax^2 + (12-a)x + \frac{a-36}{6}$, $a \in \mathbb{R} \Rightarrow$ concluzia 1p

c) Conform a) inegalitatea este echivalentă cu: $\int_0^1 f^2(x)dx \geq 24\int_0^1 xf(x)dx - \int_0^1 (12x-6)^2dx$. Cum
$12\int_0^1 xf(x)dx = \int_0^1 (12x-6)f(x)dx$, obținem $\int_0^1 f^2(x)dx \geq 2\int_0^1 (12x-6)f(x)dx - \int_0^1 (12x-6)^2dx$
echivalent $\int_0^1 (f(x) - (12x-6))^2dx \geq 0$, adevărat 1p

d) Din c) $\int_0^1 f^2(x)dx \geq 12 \Rightarrow P(f) \leq 28$ 1p
Cum $P(f_0) = 28 \Rightarrow P(f)$ maxim $= 28$ lei pentru funcția f_0 .... 1p

Subiectul 3.

Pentru $x, y \in G = [2,\infty)$ definim $x * y = \frac{xy+\sqrt{(x^2-4)(y^2-4)}}{2}$.

a) Arătați că „$*$” este lege de compoziție pe G.

b) Verificați că legea „$*$” admite element neutru.

c) Demonstrați că funcția : $[1,\infty) \to [2,\infty)$, $f(x) = x + \frac{1}{x}$ este bijectivă și $f(x) * f(y) = f(xy)$, pentru orice $x, y \in [1,\infty)$.

d) Arătați că „$*$” este asociativă.

e) Calculați $S_n = \frac{5}{2} * \frac{10}{3} * \frac{17}{4} * \dots * \frac{n^2+1}{n}$, $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.

SOLUȚIE:

a) $\forall x, y \in G \Rightarrow (x^2-4)(y^2-4) \geq 0$ și $x * y \geq 2 \Rightarrow x * y \in G \Rightarrow$ concluzia ………………………. 1p

b) $x * e = e * x = x, \forall x \geq 2;$ pentru $x = 2 \Rightarrow e = 2$ ………………………………………………. 1p
$e = 2 \Rightarrow x * 2 = 2 * x = x, \forall x \geq 2 \Rightarrow e = 2$ …………………………………………………. 1p

c) $f'(x) = \frac{x^2-1}{x^2} > 0, \forall x > 1,$ f strict crescătoare pe $[1,\infty) \Rightarrow f$ – injectivă, $Im\, f = [2,\infty) \Rightarrow f$ surjectivă $\Rightarrow f$ – bijectivă ……………………………………………………………………………………………. 1p

$f^2(x) - 4 = \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 \Rightarrow f(x) * f(y) = \frac{\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(y+\frac{1}{y}\right)+\left(x-\frac{1}{x}\right)\left(y-\frac{1}{y}\right)}{2} = xy + \frac{1}{xy} = f(xy), \forall x, y \geq 1$ …….. 1p

d) Fie $x, y, z \in [2,\infty) \Rightarrow \exists a, b, c \in [1,\infty)$ și $x = a + \frac{1}{a}, y = b + \frac{1}{b}, z = c + \frac{1}{c} \Rightarrow (x * y) * z =$
$\left[\left(a + \frac{1}{a}\right) * \left(b + \frac{1}{b}\right)\right] * \left(c + \frac{1}{c}\right) = \left(ab + \frac{1}{ab}\right) * \left(c + \frac{1}{c}\right) = abc + \frac{1}{abc}$ și, la fel, $x * (y * z) = abc + \frac{1}{abc}$ ... 1p

e) $S_n = \left(2 + \frac{1}{2}\right) * \left(3 + \frac{1}{3}\right) * \dots * \left(n + \frac{1}{n}\right) = f(2) * f(3) * \dots * f(n) = f(2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n) = f(n!) = n! + \frac{1}{n!}$ .. 1p

Notă: Asociativitatea rezultă direct observând că $(x * y)^2 - 4 = \left(\frac{xy+\sqrt{(x^2-4)(y^2-4)}}{2}\right)^2 - 4 =$
$\left(\frac{x\sqrt{y^2-4}+y\sqrt{x^2-4}}{2}\right)^2$ și $(x * y) * z = x * (y * z) = \frac{xyz+x\sqrt{(z^2-4)(y^2-4)}+y\sqrt{(x^2-4)(z^2-4)}+z\sqrt{(x^2-4)(y^2-4)}}{4}$.

Subiectul 4.

Fie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcție continuă și $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o primitivă a sa care verifică condiția $f(1-x)F(x) + e = 0$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

a) Arătați că F are semn constant pe $\mathbb{R}$.

b) Demonstrați că funcția $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(x) = F(x)F(1-x)$ este derivabilă și $g'(x) = 0$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

c) Arătați că funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = e^{1-x}$ verifică cerințele problemei.

d) Determinați toate funcțiile f care verifică condițiile date.

SOLUȚIE:

a) $F(x) \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$, F continuă, rezultă concluzia ………………………………………… 1p

b) Înlocuind pe x cu $1 - x \Rightarrow f(x)F(1-x) + e = 0$ ………………………………………………. 1p
Cum F este derivabilă și $F'(x) = f(x)$ rezultă că g este derivabilă și și $g'(x) = f(x)F(1-x) - f(1-x)F(x) = 0$ ………………………………………………………………………… 1p

c) $f(x) = e^{1-x}$, considerăm $F(x) = -e^{1-x}$ și atunci $f(1-x)F(x) = e^x(-e^{1-x}) = -e$ ………………. 2p

d) Din b) $F(x)F(1-x) = a, a \in \mathbb{R}$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$ și cum F are semn constant $\Rightarrow a > 0$. Deducem $F(1-x) = \frac{a}{F(x)}$ și atunci $f(x)\frac{a}{F(x)} + e = 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \frac{f(x)}{F(x)} = -\frac{e}{a}$, deci $\ln|F(x)| = -mx + n$, $|F(x)| = e^{-mx+n},\ m = \frac{e}{a} > 0,\ n \in \mathbb{R}$ ……………………………………………………… 1p

Dacă $F(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow F(x) = e^{-mx+n}$, deci $f(x) = -me^{-mx+n}, \forall x \in \mathbb{R}$, iar dacă $F(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow F(x) = -e^{-mx+n}$ și $f(x) = me^{-mx+n}, \forall x \in \mathbb{R}$.
Din condiția dată $\Rightarrow me^{2n-m} = e$ ……………………………………………………… 1p
Avem soluțiile: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = -\sqrt{m}e^{-mx+\frac{m+1}{2}}$ și $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{m}e^{-mx+\frac{m+1}{2}}$.