MINISTERUL EDUCAȚIEI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

ETAPA NAȚIONALĂ
13 mai 2023

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE
Clasa a IX –a – Secțiunea H1 – Filieră tehnologică

Subiectul 1.

Fie șirurile $(x_n)_{n\geq 1}$ și $(y_n)_{n\geq 1}$ definite prin $x_n = \frac{2^n+3n-4}{2}$ $și$ $y_n = \frac{2^n-3n+4}{2}$.

a) Arătați că șirul $(a_n)_{n\geq 1}, a_n = x_n - y_n$ este o progresie aritmetică iar șirul $(b_n)_{n\geq 1}, b_n = x_n + y_n$ este o progresie geometrică.

b) Să se calculeze suma $S = a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n$.

SOLUȚIE:

a) Obține $a_n = 3n - 4$ $și$ $a_{n+1} - a_n = 3(constant) \Rightarrow a_n$ progresie aritmetică..................1p

Obține $b_n = 2^n$ și $\frac{b_{n+1}}{b_n} = 2\ (constant) \Rightarrow$ b_n progresie geometrică..................1p

b) Scrie suma sub forma $S = 3(1\cdot 2 + 2\cdot 2^2 + 3\cdot 2^3 + \cdots + n\cdot 2^n) - 4(2 + 2^2 + 2^3 + \cdots 2^n)$ adică

$S = 3S_1 - 4S_2$..................2p

Calculează $S_2 = 2(2^n - 1)$..................1p

Calculează $S_1 = n2^{n+1} - S_2$..................1p

Finalizare: $S = (3n - 7)2^{n+1} + 14$ 1p

Subiectul 2.

Fie familia de funcții de gradul al doilea $f_m(x) = (m+1)x^2 + 2(m-1)x + m, m \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$.

a) Pentru $m = -2$ notăm cu x_1 $și$ x_2 rădăcinile ecuației $f_{-2}(x) = 0$. Să se formeze ecuația de gradul doi în *y*, cu rădăcinile $y_1 și$ y_2 știind că între rădăcinile celor două ecuații există relația:

$$\frac{y_1-x_1}{y_2-x_1} + \frac{y_1-x_2}{y_2-x_2} = 0 \text{ și } \frac{y_1-1}{y_2-1} + \frac{y_1-2}{y_2-2} = 0.$$

b) Să se determine valorile reale ale lui m astfel încât vârfurile V_m ale parabolelor asociate familiei să fie situate în interiorul triunghiului *OAB* unde *O(0,0), A(1,0) și B(0,1).*

SOLUȚIE:

a) Obține $2y_1y_2 + 6(y_1 + y_2) = -4$ $și$ $2y_1y_2 - 3(y_1 + y_2) = -4$..................2p

Determină $y_1y_2 = -2$ $și$ $y_1 + y_2 = 0$ și scrie ecuația $y^2 - 2 = 0$ 1p

b) Scrie $x_v = \frac{1-m}{1+m}$ și $y_v = \frac{3m-1}{m+1}$..................1p

Pune condițiile $0 < x_v < 1,\ 0 < y_v < 1$ $și$ $y_v < 1 - x_v$, ...1p

Rezolvă sistemul de inecuații și obține $\begin{cases} m \in (0,1) \\ m \in \left(\frac{1}{3}, 1\right) \\ m \in (-1,1) \end{cases} \Leftrightarrow m \in \left(\frac{1}{3}, 1\right)$..................2p

Subiectul 3.

Laturile *AB*=*c*, *AC*=*b* și *BC*=*a* ale unui triunghi *ABC* verifică relațiile $5a^2 = 5b^2 + c^2$ și $3b^2 = 3c^2 + a^2$.

a) Arătați că $b = \frac{2a\sqrt{2}}{3}$ și $c = \frac{a\sqrt{5}}{3}$.

b) Demonstrați că $tgA = 3$.

c) Dacă raza cercului circumscris triunghiului *ABC* este egală cu $\sqrt{10}$, determinați aria triunghiului *ABC*.

SOLUȚIE:

a) Obține $b = \frac{2a\sqrt{2}}{3}$ și $c = \frac{a\sqrt{5}}{3}$ … . .2p

b) Calculează $cosA = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{1}{\sqrt{10}}$...2p

Determină $sinA = \frac{3}{\sqrt{10}}$ și obține $tgA = 3$..1p

c) Din $\frac{a}{sinA} = 2R \Rightarrow a = 6$...1p

Determină $b = 4\sqrt{2}$ $și$ $c = 2\sqrt{5}$ și obține aria $A = \frac{bcsinA}{2} = 12$...1p

Subiectul 4.

Pe un teren orizontal piciorul unui turn *AN* se găsește la o distanță de 12m de piciorul unui copac *BM*. De la piciorul *N* al turnului, vârful copacului se vede sub un unghi α, iar de la piciorul *M* al copacului, vârful turnului se vede sub un unghi egal cu 2α. Din mijlocul *P* al segmentului *MN*, unghiurile sub care se văd vârful turnului și vârful copacului sunt complementare.

a) Dacă notăm *AN*= *x* și *BM*= *y*, demonstrați că *xy=36*.

b) Determinați înălțimea turnului și înălțimea copacului.

c)O pasăre zboară din *B* în *A* cu o viteză de două ori mai mică decât viteza cu care zboară din *A* în *B*. Dacă pasărea pleacă din *B* și zboară dintr-un vârf în altul timp de 52 de secunde, parcurgând o distanță totală de 273 m, determinați viteza de zbor pe traseul de la *B* la *A*.

SOLUȚIE:

a) Dacă $a = m(\widehat{APN})$ $și$ $b = m(\widehat{BPM})$ găsește că $tga = \frac{x}{6}$ $și$ $tgb = \frac{y}{6}$...1p

Din $a + b = \frac{\pi}{2}$ $deduce$ că $tga = ctgb$ $și$ $obține$ $xy = 36$..1p

b) În triunghiurile BNM și ANM scrie $tg\alpha = \frac{y}{12}$ și $tg2\alpha = \frac{x}{12}$...1p

Din $tg2\alpha = \frac{2tg}{1-tg^2\alpha}$ și $x = \frac{36}{y}$ obține $x = 9m$ $și$ $y = 4m$...1p

c) Determină AB=13m și stabilește că numărul de zboruri pe traseul B→ A $este$ 11 și pe traseul $A \rightarrow B$ $este$ 10..........1p

Determină $t_1 = \frac{143}{v}, t_2 = \frac{130}{2v}$, unde v este viteza pe traseul de la B la A...1p

Din $t_1 + t_2 = 52$ obține v=4m/s..1p