MINISTERUL EDUCAȚIEI

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

ETAPA NAȚIONALĂ
13 mai 2023

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE

Clasa a IX –a – Secțiunea H2 – Specializarea Științe ale Naturii

Subiectul 1. a) Arătați că $x^2+y\ge \frac{y(x+1)^2}{y+1}$, oricare ar fi numerele reale pozitive x și y.

b) Dacă a,b şi c sunt numere reale pozitive astfel încât $a\cdot b\cdot c=1$, atunci are loc inegalitatea:

$$\left(a^2+b\right)\left(b^2+c\right)\left(c^2+a\right)\ge(a+1)(b+1)(c+1).$$

c) Dacă a,b şi c sunt numere reale pozitive, atunci are loc inegalitatea:

$$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\ge\frac{a(a+2)-b}{b+1}+\frac{b(b+2)-c}{c+1}+\frac{c(c+2)-a}{a+1}.$$

SOLUŢIE: a) $x^2+y\ge\frac{y(x+1)^2}{y+1}\Leftrightarrow(x^2+y)(y+1)\ge y(x+1)^2\Leftrightarrow x^2y+x^2+y^2+y-x^2y-2xy-y\ge0$ 1p

După reducerea termenilor asemenea, se obține $x^2-2xy+y^2\ge0\Leftrightarrow(x-y)^2\ge0$ (A)....................1p

b) Din a) avem:

$$a^2+b\ge\frac{b(a+1)^2}{b+1},b^2+c\ge\frac{c(b+1)^2}{c+1},c^2+a\ge\frac{a(c+1)^2}{a+1}$$ 1p

Înmulțim membru cu membru cele 3 inegalități și se obține:

$$\left(a^2+b\right)\left(b^2+c\right)\left(c^2+a\right)\ge\frac{abc(a+1)^2(b+1)^2(c+1)^2}{(a+1)(b+1)(c+1)}$$ 1p

După simplificare și , ținând cont de condiția din ipoteză $a\cdot b\cdot c=1$, se obține inegalitatea ce trebuia demonstrată: $\left(a^2+b\right)\left(b^2+c\right)\left(c^2+a\right)\ge(a+1)(b+1)(c+1)$ 1p

c) Relația $a^2+b\ge\frac{b(a+1)^2}{b+1}$ este echivalentă cu $\frac{a^2}{b}\ge\frac{(a+1)^2}{b+1}-1$ sau $\frac{a^2}{b}\ge\frac{a(a+2)-b}{b+1}$ (1)....................1p

Prin permutări circulare se obțin inegalitățile: $\frac{b^2}{c}\ge\frac{b(b+2)-c}{c+1}$ (2) şi $\frac{c^2}{a}\ge\frac{c(c+2)-a}{a+1}$ (3).

Prin adunarea membru cu membru a celor inegalităților (1), (2) și (3) se obține inegalitatea cerută. 1p

Subiectul 2. Prin mijloacele laturilor unui patrulater convex se duc perpendiculare pe laturile opuse. Arătați că dacă trei din aceste perpendiculare sunt concurente într-un punct, atunci și cea de-a patra perpendiculară trece prin același punct.

SOLUȚIE: Notăm cu *M, N, P* și *Q* mijloacele laturilor $[AB],[BC],[CD]$ și $[DA]$ și cu O punctul de intersecție al perpendicularelor din *M*, *N* și *P* respectiv pe laturile opuse ale patrulaterului *ABCD*.
Conform ipotezei, vom avea:

$\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{CD}=0 \Leftrightarrow \frac{\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right)}{2}\cdot\left(\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OC}\right)=0$, $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{AB}=0 \Leftrightarrow \frac{\left(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}\right)}{2}\cdot\left(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\right)=0$,

$\overrightarrow{ON}\cdot\overrightarrow{AD}=0 \Leftrightarrow \frac{\left(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OB}\right)}{2}\cdot\left(\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA}\right)=0$, ……………………………………………………………........……...............3p

Efectuând calculele, se obține:

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OD}=0\,(1)$

$\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OD}\cdot\overrightarrow{OA}=0\,(2)$

$\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OD}\cdot\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OA}=0\,(3)$……………………………………………………………......................…..1p

Din relațiile (1), (2) prin scădere, rezultă că $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OD}$ și înlocuind în (3) se obține $\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$ ....…2p

Adunăm relațiile $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OD}$ și $\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$, membru cu membru și se obține:

$\overrightarrow{OC}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OD}\right)=\overrightarrow{OB}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OD}\right)\Leftrightarrow\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OD}\right)\left(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}\right)=0$

Dar $\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OD}\right)=2\overrightarrow{OQ}$ și $\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{CB}$, deci $\overrightarrow{OQ}\cdot\overrightarrow{CB}=0$ rezultă $OQ\perp CB$ ………...…………………...................…..1p

Subiectul 3. Ionel și Andrei au mers în parcul de distracții SUPERLAND, unde au ales să joace „*Mingea buclucașă*”. Jocul se desfășoară astfel: într-un tub gradat din metru în metru, cu înălțimea de 15 m, se află o minge foarte elastică, iar la capătul inferior al tubului o pedală exterioară. În funcție de forța cu care se apasă pedala, mingea se ridică în tub până la o înălțime inițială maximă, după care coboară până atinge podeaua și se ridică din nou, de fiecare dată după ce atinge podeaua, până la o înălțime de un număr de ori mai mică față de înălțimea la care s-a ridicat în etapa anterioară. Numim *„săritură”* când mingea atinge podeaua. Ionel a ridicat mingea la înălțimea maximă de 8 m, iar după fiecare săritură, mingea s-a ridicat la o înălțime de două ori mai mică față de înălțimea anterioară. Andrei a ridicat mingea la înălțimea maximă de 9 m, iar după fiecare săritură, mingea s-a ridicat la o înălțime de trei ori mai mică decât înălțimea anterioară.

a) Să se arate că după 100 de sărituri, distanța parcursă de mingea aruncată de Ionel este mai mică decât 32 de metri.

b) Dacă mingea lui Andrei s-a oprit după 110 sărituri, iar a lui Ionel după 100 de sărituri, în care din cele două cazuri mingea a parcurs distanța cea mai mare?

SOLUȚIE:

a) După 100 de sărituri, mingea parcurge distanța, calculată în metri:

$2\cdot 8+2\cdot 4+2\cdot 2+2\cdot 1+2\cdot\frac{1}{2}+2\cdot\frac{1}{2^2}+2\cdot\frac{1}{2^3}+...+2\cdot\frac{1}{2^{96}}=$ …………………………………………........................…2p

$30+2\cdot\left(1-\frac{1}{2^{96}}\right)=32-\frac{1}{2^{95}}<32$ ……………………………………………………………...........................…2p

b)Conform punctului a), după 100 de sărituri mingea lansată de Ionel parcurge până la oprire distanța de $\left(32-\frac{1}{2^{95}}\right)m$. Efectuând calculele pentru calculul distanței parcurse de mingea lansată de Andrei se obține distanța(în metri):

$2\cdot 9+2\cdot 3+2\cdot 1+2\cdot\frac{1}{3}+2\cdot\frac{1}{3^2}+2\cdot\frac{1}{3^3}+...+2\cdot\frac{1}{3^{107}}=26+2\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{\frac{1}{3^{107}}-1}{\frac{1}{3}-1}\right)=27-\frac{1}{3^{107}}$ ……….........................2p

Concluzia ………………………………………………………………………………...….........................1p

Subiectul 4. a) Să se arate că $\cos\frac{\pi}{5}=\frac{1+\sqrt{5}}{4}$.

b) Fie numărul $\varphi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (secțiunea de aur) ($\varphi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ rădăcina pozitivă a ecuației $x^2-x-1=0$).

Determinați triunghiurile isoscele în care raportul dintre bază și latură este φ.

SOLUŢIE:

a) $\frac{2\pi}{5}+\frac{3\pi}{5}=\pi \Rightarrow \sin\frac{2\pi}{5}=\sin(\pi-\frac{3\pi}{5}) \Rightarrow \sin\frac{2\pi}{5}=\sin\frac{3\pi}{5}$ ……………………………............………...…....…1p

Prin aplicarea formulelor de exprimare a funcțiilor trigonometrice pentru unghiul dublu, respectiv triplu, se obține relația : $2\sin\frac{\pi}{5}\cos\frac{\pi}{5}=3\sin\frac{\pi}{5}-4\sin^3\frac{\pi}{5}$.

$2\sin\frac{\pi}{5}\cos\frac{\pi}{5}=3\sin\frac{\pi}{5}-4\sin^3\frac{\pi}{5}\Big|:\sin\frac{\pi}{5}\Rightarrow$

………………………………………………...............…......1p

$2\cos\frac{\pi}{5}=3-4\sin^2\frac{\pi}{5}\Leftrightarrow 2\cos\frac{\pi}{5}=4\cos^2\frac{\pi}{5}-1$

În ultima relație notăm cu $t=\cos\frac{\pi}{5}$ și re rezolvă ecuația de gradul al doilea: $4t^2-2t-1=0$ cu rădăcinile $t_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{5}}{4}$ cu soluția $t=\frac{1+\sqrt{5}}{4}$ și prin urmare $\cos\frac{\pi}{5}=\frac{1+\sqrt{5}}{4}$ ($0<\frac{\pi}{5}<\frac{\pi}{2}$)……………………….................1p

b) Fie triunghiul ABC, cu $AB=AC$ și $\frac{BC}{AB}=\varphi$. Notăm cu D mijlocul laturii BC și $\alpha=\sphericalangle ABC$.

Atunci $\varphi=2\frac{BD}{AB}=2\cos\alpha$ ……………………………………………………………….......…..........…2p

$\varphi=2\frac{\sqrt{5}+1}{4}=2\cos 36^\circ \Rightarrow \alpha=36^\circ$. ……………………………………………………………......….........1p

În concluzie triunghiurile care satisfac condiția sunt cele care au unghiurile: $36^\circ, 36^\circ, 108^0$………...............…1p.