



CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

INSPECTORATUL ȘCOLAR
JUDEȚEAN IAȘIETAPA JUDEȚEANĂ - 11 martie 2023
Secțiunea H2FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAȘINI
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera Teoretică: profilul Real – specializarea Științe ale Naturii

Clasa a XII -a

Subiectul 1.

Pentru $a \in \mathbb{R}$ considerăm mulțimea $G_a = (a, +\infty)$ și legea de compoziție pe G_a definită prin $x * y = xy - ax - ay + a^2 + a$, pentru orice $x, y \in G_a$.

- Arătați că $(G_a, *)$ este grup abelian.
- Demonstrați că $f_a: G_a \rightarrow \mathbb{R}$, $f_a(x) = \ln(x - a)$ este izomorfism între grupurile $(G_a, *)$ și $(\mathbb{R}, +)$.
- Definiți o lege de compoziție „ \circ ” pe $G = (2023, +\infty)$ și o lege de compoziție „ Δ ” pe $H = (2024, +\infty)$ astfel încât (G, \circ) și (H, Δ) să fie grupuri abeliene izomorfe.

Subiectul 2.

Pe mulțimea $G = (1, +\infty)$ definim legea de compoziție asociativă $x \circ y = \sqrt[3]{x^{\log_2 y}}$ pentru orice $x, y \in G$.
Arătați că:

- $x \circ y = 2^{\frac{1}{3} \log_2 x \cdot \log_2 y}$, pentru orice $x, y \in G$;
- pentru fiecare $n \in \mathbb{N}^*$, există $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n \in G$, $x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_n$ astfel încât $x_1 \circ x_2 \circ x_3 \circ \dots \circ x_n$ să fie număr natural;
- $2022 \circ 2024 < 2023 \circ 2023$.

Subiectul 3.

În urma unui accident, la o fabrică de produse chimice, se produce o poluare a mediului din apropierea fabricii. Coeficientul de poluare este modelat prin numărul real $I_n = 100 \cdot \int_1^2 \frac{dx}{x^n \sqrt{1+x^2}}$, $n \in \mathbb{N}$. I_0 este coeficientul de poluare imediat după accident, I_n este coeficientul de poluare, în ziua „ n ”, după accident. Mediul este considerat nepoluat dacă coeficientul de poluare este cel mult egal cu 5.

- Arătați că $I_0 > 50$.
- Demonstrați că, în timp, coeficientul de poluare se micșorează (altfel spus arătați că $I_n \geq I_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$).
- Arătați că, în cel mult 20 de zile, mediul devine nepoluat.

Subiectul 4.

Funcția $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ se numește asociată funcției continue $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dacă $g(x) + \int_0^x f(x-t)dt = e^x$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

- Determinați funcția $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ asociată funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{|x|+1}$.
- Dacă $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ este asociată funcției continue $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, arătați că g este derivabilă și $g'(x) = e^x - f(x)$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.
- Determinați funcția continuă $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dacă, funcția asociată acesteia, este egală cu funcția f .

Notă: Timp de lucru 3 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.