MINISTERUL EDUCAȚIEI

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

ETAPA NAȚIONALĂ
24 mai 2024

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE
Clasa a X–a – Secțiunea H1 – Filieră tehnologică

Subiectul 1.

Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuațiile:

a) $\sqrt{x+2}+\sqrt{2x-3}=\sqrt{2x+5}$.

b) $2x-lg(5^{2x}+4x-16)=lg(4^x)$.

SOLUȚIE:

a) Condițiile de existență pentru radicali sunt $\begin{cases} x+2\geq 0 \\ 2x-3\geq 0 \\ 2x+5\geq 0\end{cases} \Rightarrow x\in\left[\frac{3}{2};\infty\right)$. Prin ridicare la pătrat obținem

$3x-1+2\sqrt{2x^2+x-6}=2x+5\Rightarrow 2\sqrt{2x^2+x-6}=6-x$ 1p

Impunem condițiile $\begin{cases} x\in\left[\frac{3}{2};\infty\right) \\ 6-x\geq 0\end{cases} \Rightarrow x\in(-\infty;6]\cap\left[\frac{3}{2};\infty\right)\Rightarrow x\in\left[\frac{3}{2};6\right]$

$\left(2\sqrt{2x^2+x-6}\right)^2=(6-x)^2\Rightarrow 8x^2+4x-24=36-12x+x^2\Rightarrow 7x^2+16x-60=0$ 1p

$\Delta=256-4\cdot 7\cdot(-60)=256+1680=1936=44^2$, $x_{1,2}=\frac{-16\pm 44}{14}=\frac{-8\pm 22}{7}$. 1p

$x_1=\frac{-30}{7}\notin\left[\frac{3}{2};6\right]$, $x_2=\frac{14}{7}=2\in\left[\frac{3}{2};6\right]\Rightarrow S=\{2\}$ 1p

b) Condițiile de existență pentru logaritmi sunt $\begin{cases} 5^{2x}+4x-16>0 \\ 4^x>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5^{2x}+4x-16>0 \\ x\in\mathbb{R}\end{cases}$.

$lg10^{2x}=lg(4^x)(5^{2x}+4x-16)\Rightarrow 2^{2x}\cdot 5^{2x}=2^{2x}(5^{2x}+4x-16)$ 1p

$5^{2x}=5^{2x}+4x-16\Rightarrow 4x-16=0\Rightarrow x=4$ 1p

$x=4$ verifică inegalitatea $5^{2x}+4x-16>0$, deoarece $5^8+16-16>0$. $S=\{4\}$ 1p

Subiectul 2.

Se consideră sumele: $S_1=[log_2\sqrt{2\cdot 3}]+[log_3\sqrt{3\cdot 4}]+[log_4\sqrt{4\cdot 5}]+\ldots+[log_n\sqrt{n\cdot(n+1)}]$ *și*

$S_2=[log_2(\sqrt{3}-\sqrt{2})]+[log_3(\sqrt{4}-\sqrt{3})]+[log_4(\sqrt{5}-\sqrt{4})]+\ldots+[log_n(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})]$,

unde $[x]$ *reprezintă parte întreagă a lui x.*

a) *Să se demonstreze că* $S_1=n-1$.

b) *Arătați că* $S_1+S_2\leq 0$

SOLUȚIE:

a) Folosind inegalitatea mediilor și monotonia funcției logaritmice cu bază supraunitară pe $(0,+\infty)$, obținem: $\sqrt{k(k+1)}<\frac{2k+1}{2}$, $\forall k\in\mathbb{N}, 2\leq k\leq n$..........1p

$1=log_k k<log_k\sqrt{k(k+1)}<log_k\left(\frac{2k+1}{2}\right)<log_k k^2=2\Longrightarrow\left[log_k\sqrt{k(k+1)}\right]=1$ 1p

$S_1=\sum_{k=2}^{n}\left[\log_k\sqrt{k(k+1)}\right]=n-1$ 1p

b) $\sqrt{k+1}-\sqrt{k}=\frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}<\frac{1}{\sqrt{k}}$ 1p

$\log_k\left(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\right)<\log_k\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)=-\frac{1}{2}\Longrightarrow\left[\log_k\left(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\right)\right]\leq -1$ 1p

$S_2=\sum_{k=2}^{n}\left[\log_k\left(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\right)\right]\leq-(n-1)$ 1p

$S_1+S_2\leq(n-1)-(n-1)\Longrightarrow S_1+S_2\leq 0$ 1p

Subiectul 3.

Se consideră dezvoltarea $\left(3\cdot\sqrt{\frac{x}{\sqrt[3]{y}}}+\sqrt[3]{\frac{y}{\sqrt{x}}}\right)^n$, *unde* $n\in\mathbb{N}^*, x,y\in\mathbb{R}_+^*$.

a) *Să se determine numărul natural,* $n\in\mathbb{N}^*$ *pentru care* $A_n^3+C_n^{n-2}=\frac{45n}{2}$.

b) *Pentru numărul natural obținut anterior determinați termenul dezvoltării în care exponentul lui* x *este dublul exponentului lui* y.

c) *Determinați numărul natural,* $n\in\mathbb{N}^*$ *pentru care suma coeficienților dezvoltării este cu 240 mai mare decât suma coeficienților binomiali ai dezvoltării.*

SOLUȚIE:

a) Condițiile de existență pentru aranjamente și combinări sunt $\begin{cases} n\geq 3\\ n-2\geq 0 \Rightarrow n\in[3,\infty)\cap\mathbb{N}^*\\ n\in\mathbb{N}^*\end{cases}$

$\frac{n!}{(n-3)!}+\frac{n!}{(n-2)!2!}=\frac{45n}{2}\Longrightarrow 2n^2-5n-42=0$ 1p

$\Delta=361=19^2; n_1=6\in[3,\infty)\cap\mathbb{N}^*; n_2=-\frac{7}{2}\notin[3,\infty)\cap\mathbb{N}^*\Longrightarrow S=\{6\}$ 1p

b) $T_{k+1}=C_6^k\cdot\left(3\cdot\sqrt{\frac{x}{\sqrt[3]{y}}}\right)^{6-k}\cdot\left(\sqrt[3]{\frac{y}{\sqrt{x}}}\right)^k\Longrightarrow T_{k+1}=C_6^k\cdot 3^{6-k}\cdot x^{\frac{18-4k}{6}}\cdot y^{\frac{3k-6}{6}}$ 1p

$\frac{18-4k}{6}=2\cdot\frac{(3k-6)}{6}\Leftrightarrow 18-4k=6k-12\Leftrightarrow k=3\Longrightarrow \mathrm{T}_4=540\,\mathrm{x}\cdot\sqrt{y}$ 1p

c) Înlocuind: $x=y=1$, se obține suma tuturor coeficienților dezvoltării: $(3\cdot 1+1)^{\mathrm{n}}=4^n$

$C_n^0+C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^n=2^n$ 1p

$4^n=240+2^n\Leftrightarrow 4^n-2^n-240=0$; Notând $2^n=t>0$ obținem ecuația $t^2-t-240=0$ 1p

$\Delta=961=31^2; t_{1,2}=\frac{1\pm 31}{2}\Longrightarrow t_1=16; t_2=-15<0\Longrightarrow 2^n=16\Longrightarrow n=4$ 1p

Subiectul 4.

Pe o hartă înzestrată cu un sistem de axe de coordonate xOy *se consideră localitățile identificate prin punctele* A,B,C,D *de afixe* $z_A=-4-2i$, $z_B=2$, $z_C=1+3i$, *respectiv* $z_D=-5+i$.

Scara hărții este $1:100000$, *iar unitatea de lungime pe hartă este de* 1 *cm.*

a) *Stabiliți natura patrulaterului* $ABCD$.

b) *Determinați afixul punctului* M, *unde* M *reprezintă un centru de colectare a deșeurilor electrice și electronice, aflat la distanțe egale față de cele patru localități.*

c) *Știind că drumul de la* A *la* M *este o linie dreaptă, aflați câți* km *va avea, în realitate, drumul de la* A *la* M.

SOLUȚIE:

a) $\frac{z_A-z_B}{z_C-z_B}=\frac{-4-2i-2}{1+3i-2}=\frac{-6-2i}{-1+3i}=\frac{6+2i}{1-3i}=\frac{(6+2i)(1+3i)}{(1-3i)(1+3i)}=\frac{20i}{10}=2i\notin\mathbb{R}$. $\frac{z_A-z_B}{z_C-z_B}\notin\mathbb{R}\Leftrightarrow A,B,C$ necoliniare. $(*)$

$z_A+z_C=-4-2i+1+3i=-3+i$, $z_B+z_D=2-5+i=-3+i\Rightarrow z_A+z_C=z_B+z_D$. $(**)$

Din $(*)$ și $(**)$ rezultă că $ABCD$ este paralelogram. 1p

$AB=|z_B-z_A|=|6+2i|=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$, $BC=|z_C-z_B|=|-1+3i|=\sqrt{10}$, $AC=|z_C-z_A|=|5+5i|=\sqrt{50}=5\sqrt{2}$. 1p

ΔABC avem $BC^2+AB^2=AC^2$, conform teoremei reciproce a lui Pitagora rezultă că $m(\hat{B})=90^\circ$.

$ABCD$ este paralelogram cu $m(\hat{B})=90^\circ\Rightarrow ABCD$ este dreptunghi. 1p

b) $MA=MB=MC\Rightarrow M$ este centrul cercului circumscris ΔABC, $m(\hat{B})=90^\circ\Rightarrow M$ este mijlocul $[AC]$.

$ABCD$ este dreptunghi$\Rightarrow [AC]$ și $[BD]$ au același mijloc și $AC=BD$.

$MA=MB=MC=MD=\frac{AC}{2}$. 1p

$z_M=\frac{z_A+z_C}{2}=\frac{-3+i}{2}\Rightarrow M\left(-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}i\right)$ 1p

c) 1 cm pe hartă înseamnă 100000 cm pe teren, adică 1 km pe teren. 1p

$AM=\frac{AC}{2}=\frac{5\sqrt{2}}{2}$. Lungimea drumului de la A la M este egală cu $\frac{5\sqrt{2}}{2}$ km. 1p

Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.