MINISTERUL EDUCAȚIEI

CONCURSUL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "*ADOLF HAIMOVICI*"

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

ETAPA NAȚIONALĂ
24 mai 2024

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE
Clasa a X–a – Secțiunea H2 – Profil real, specializarea științe ale naturii

Subiectul 1. Se consideră numerele reale $a,b,c\in(1,\infty)$ și expresia $E=\log_{bc}a+\log_{ca}b+\log_{ab}c$.

a) Determinați valoarea minimă a expresiei *E*.

b) Știind că $E=\frac{3}{2}$ și $a+b+c=6$, determinați numerele reale *a,b,c*.

SOLUȚIE:

a) $E=\log_{bc}a+\log_{ca}b+\log_{ba}c=\frac{\lg a}{\lg bc}+\frac{\lg b}{\lg ac}+\frac{\lg c}{\lg ba}$ ....**1 punct**

$E=\frac{\lg a}{\lg b+\lg c}+\frac{\lg b}{\lg a+\lg c}+\frac{\lg c}{\lg b+\lg a}$ ....**1 punct**

Notează $x=\lg a, y=\lg b, z=\lg c$, unde $x,y,z>0$ și demonstrează că: $E=\frac{x}{y+z}+\frac{y}{x+z}+\frac{z}{x+y}\geq\frac{3}{2}$ ....**2 puncte**

Deduce că valoarea minimă a expresiei *E* este $\frac{3}{2}$ ....**1 punct**

b) Dacă $E=\frac{3}{2}$, deduce că $\lg a=\lg b=\lg c$, de unde rezultă $a=b=c$ ....**1 punct**

Obține $a=b=c=2$..**1 punct**

Subiectul 2. Fie a numărul funcțiilor $f:\{1,2,3,....,m\}\to\{1,2,3,....36\}$, unde $m\in\mathbb{N}^*$, iar b numărul funcțiilor $g:\{1,2,3,....n\}\to\{1,2,3,4,5\}$, unde $n\in\mathbb{N}^*$. Să se afle minimul expresiei $|a-b|$.

SOLUȚIE: Scrie $a=36^m$ și $b=5^n$ ....**1 punct**

Analizează următoarele cazuri:

1) Dacă $a>b\Rightarrow 36^m>5^n\Rightarrow 36^m-5^n>0$ și $u(36^m-5^n)=1$ ....**1 punct**

Dacă $36^m-5^n=1\Rightarrow 36^m-1=5^n\Rightarrow(6^m+1)(6^m-1)=5^n\Rightarrow 5^n\,\vdots\,(6^m+1)$ contradicție deoarece $u(6^m+1)=7$.**1 punct**

Egalitatea $36^m-5^n=11$ are loc pentru $m=1$ și $n=2$ ....**1 punct**

2) Dacă $a<b\Rightarrow 36^m<5^n\Rightarrow 5^n-36^m>0$ și $u(5^n-36^m)=9$ ....**1 punct**

Dacă $5^n-36^m=9\Rightarrow 5^n\,\vdots\,9$ contradicție..**1 punct**

Minimul expresiei $|a-b|$ este 11 și se realizează pentru $m=1$ și $n=2$ ....**1 punct**

Subiectul 3. Să se afle $x\in[0,+\infty)$ care verifică egalitatea:

$$256^x+81^x+\log_5\left(16^x+9^x\right)=49^x+2\cdot144^x+4\cdot84^x+\log_5\left(7^x+2\cdot12^x\right).$$

SOLUȚIE: Adună ambilor membri ai egalității $2\cdot144^x$ și obține :

$16^{2x}+9^{2x}+2\cdot144^x+\log_5\left(16^x+9^x\right)=7^{2x}+4\cdot12^{2x}+4\cdot12^x\cdot7^x+\log_5\left(7^x+2\cdot12^x\right)$ ....**1 punct**

$\left(16^x+9^x\right)^2+\log_5\left(16^x+9^x\right)=\left(7^x+2\cdot12^x\right)^2+\log_5\left(7^x+2\cdot12^x\right)$ ....**1 punct**

Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R},\ \ f(x)=x^2+\log_5 x$ ....**1 punct**

f este strict crescătoare pe $(0,+\infty)$, rezultă f injectivă..**1 punct**

$f\left(16^x+9^x\right)=f\left(7^x+2\cdot12^x\right)\Rightarrow16^x+9^x=7^x+2\cdot12^x$ ....**1 punct**

$\left(4^x-3^x\right)^2=7^x\Rightarrow4^x-3^x=\sqrt{7}^x\Rightarrow\left(\frac{3}{4}\right)^x+\left(\frac{\sqrt{7}}{4}\right)^x=1$ ....**1 punct**

Funcția $g:[0,+\infty)\to\mathbb{R},\ \ g(x)=\left(\frac{3}{4}\right)^x+\left(\frac{\sqrt{7}}{4}\right)^x$ este strict descrescătoare pe $[0,+\infty)$ și $g(2)=1$, prin urmare ecuația $g(x)=1$ admite soluția unică $x=2$ ....**1 punct**

Subiectul 4. O fabrică de jucării din Grecia este construită astfel încât să deservească optim și echitabil trei magazine *Jumbo* (există căi rutiere de acces atât de la fabrică la cele trei magazine cât și între magazine). Raportându-ne la un sistem de axe ortogonale cu unitatea de $1\,km$, locațiile magazinelor A,B,C au următoarele coordonate: $A(8,20)$, $B(36,6)$ și $C(21,21)$.

- **a)** Aflați distanța dintre locațiile magazinelor A și B aproximată la cel mai apropiat număr întreg de kilometri.
- **b)** Determinați coordonatele punctului F în care se află fabrica de jucării.
- **c)** Determinați perechea (a,b) astfel încât $y=ax+b$ să reprezinte ecuația paralelei prin A la dreapta BC.
- **d)** Stabiliți ce coordonate are punctul P în care trebuie construit un panou publicitar astfel încât P să fie simetricul punctului A față de șoseaua ce unește optim magazinele B și C.

SOLUȚIE:

a) $AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}=\sqrt{(36-8)^2+(6-20)^2}=\sqrt{28^2+14^2}=14\sqrt{5}\ km\cong31\,km$ ....**1 punct**

b) Pentru ca fabrica de jucării să deservească optim și echitabil cele trei magazine *Jumbo*, trebuie să aibă loc relația $FA=FB=FC$, prin urmare fabrica F trebuie să fie amplasată în centrul cercului circumscris triunghiului ABC ....**1 punct**

Află locația fabricii de jucării $F(16,1)$ ....**2 puncte**

c) Ecuația paralelei prin A la dreapta BC este $y-y_A=m_{BC}(x-x_A)\Rightarrow y=-x+28$, prin urmare $a=-1$ și $b=28\Rightarrow(a,b)=(-1,28)$ ....**1 punct**

d) Punctul P este simetricul punctului A față de dreapta BC, prin urmare dreapta BC este mediatoarea segmentului AP. Ecuația generală a dreptei AP este $x-y+12=0$ iar panoul publicitar trebuie amplasat în punctul $P(22,34)$ ……………………………..…………………………………………..**2 puncte**

<u>Notă</u>: *Orice altă rezolvare corectă se punctează conform baremului.*