CONCURSUL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA NAȚIONALĂ
24 mai 2024

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE
Clasa a XI–a – Secțiunea H1 – Filieră tehnologică

Subiectul 1. Un teren are forma unui paralelogram. Acesta, reprezentat în reperul cartezian xOy, are vârfurile în punctele $A(5,7)$, $B(-7,12)$, $C \in Ox$ și $D \in Oy$. Se știe că unitatea de măsură a reperului cartezian are lungimea egală cu $3m$ și că $E\left(-\frac{119}{24},0\right)$ și $F\left(0,\frac{119}{10}\right)$ sunt două puncte interioare paralelogramului $ABCD$.

a) Să se determine ecuația dreptei CD.

b) Calculați suprafața terenului.

c) Demonstrați că oricare ar fi punctul M situat pe dreapta EF, suma distanțelor de la punctul M la oricare două vârfuri opuse ale paralelogramului $ABCD$ este constantă.

SOLUȚIE:

a) $C \in Ox \Longrightarrow C(a,0), a \in \mathbb{R}$

$D \in Oy \Longrightarrow D(0,b), b \in \mathbb{R}$

$ABCD$ paralelogram $\Longrightarrow \begin{cases} x_A + x_C = x_B + x_D \\ y_A + y_C = y_B + y_D \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5 + a = -7 + 0 \\ 7 + 0 = 12 + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -12 \\ b = -5 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} C(-12,0) \\ D(0,-5) \end{cases}$ **1p**

Ecuația dreptei CD: $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_C & y_C & 1 \\ x_D & y_D & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -12 & 0 & 1 \\ 0 & -5 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 5x + 12y + 60 = 0$ **1p**

b) $ABCD$ paralelogram $\Longrightarrow \mathcal{A}_{ABCD} = 2 \cdot \mathcal{A}_{\Delta ABC}$

$\Delta = \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 7 & 1 \\ -7 & 12 & 1 \\ -12 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 169$..**1p**

$\mathcal{A}_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot |\Delta| = \frac{169}{2} \Longrightarrow \mathcal{A}_{ABCD} = 2 \cdot \mathcal{A}_{\Delta ABC} = 169u^2 \Longrightarrow \mathcal{S}_{teren} = 169 \cdot (3m)^2 = 1521m^2$..............................**1p**

c) Ecuația dreptei EF: $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_E & y_E & 1 \\ x_F & y_F & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ \frac{-119}{24} & 0 & 1 \\ 0 & \frac{119}{10} & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 24x - 10y + 119 = 0$

$\left.\begin{matrix} M(x_M, y_M) \in EF \Longrightarrow 24 \cdot x_M - 10 \cdot y_M + 119 = 0 \\ x_M = m \end{matrix}\right\} \Longrightarrow y_M = \frac{24m+119}{10} \Longrightarrow M\left(m, \frac{24m+119}{10}\right)$..**1p**

$\left.\begin{matrix} MA = \sqrt{(x_M - x_A)^2 + (y_M - y_A)^2} = \sqrt{(m-5)^2 + \left(\frac{24m+119}{10} - 7\right)^2} = \sqrt{\frac{676m^2+1352m+4901}{100}} \\ MB = \sqrt{(x_M - x_B)^2 + (y_M - y_B)^2} = \sqrt{(m+7)^2 + \left(\frac{24m+119}{10} - 12\right)^2} = \sqrt{\frac{676m^2+1352m+4901}{100}} \end{matrix}\right\} \Longrightarrow MA = MB$..........**1p**

$\left.\begin{matrix} MC = \sqrt{(x_M - x_C)^2 + (y_M - y_C)^2} = \sqrt{(m+12)^2 + \left(\frac{24m+119}{10} - 0\right)^2} = \sqrt{\frac{676m^2+8112m+28561}{100}} \\ MD = \sqrt{(x_M - x_D)^2 + (y_M - y_D)^2} = \sqrt{(m+0)^2 + \left(\frac{24m+119}{10} + 5\right)^2} = \sqrt{\frac{676m^2+8112m+28561}{100}} \end{matrix}\right\} \Longrightarrow MC = MD \Longrightarrow$

$\Longrightarrow MA + MC = MB + MD$..**1p**

Subiectul 2. Se consideră sistemul de ecuații $\begin{cases} 3x+2y-z=1 \\ mx+y+2z=5 \\ 2x+y-z=m \end{cases}$, unde m este un parametru real.

a) Determinați valorile lui m pentru care sistemul este compatibil determinat.

b) Pentru $m \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ rezolvați sistemul de ecuații.

c) Să se afle valoarea minimă a sumei $x_0+y_0+z_0$, unde $(x_0, y_0 \ , z_0)$ este soluție a sistemului de ecuații, pentru $m \in (-\infty, -1)$.

SOLUȚIE:

a) sistemul este compatibil determinat $\leftrightarrow detA \neq 0$, unde A este matricea asociată sistemului

$\leftrightarrow m+1 \neq 0 \ \leftrightarrow m \neq -1 \ \leftrightarrow m \epsilon R \ / \{-1\}$ **1p**

b) dacă $m \neq -1$ sistemul este compatibil determinat (de tip Cramer)

calculează $\Delta_x = 5m+2;\ \Delta_y = -m^2-5m-1;\ \Delta_z = -2m^2+4m+3$

se obține soluția S = $\left\{\left(\frac{5m+2}{m+1}, \frac{-m^2-5m-1}{m+1}, \frac{-2m^2+4m+3}{m+1}\right)\right\}$ $m \neq -1$ **2p**

Dacă $m=-1$ sistemul este incompatibil.

c) calculează suma $x_0+y_0+z_0$ și asociază funcția

$f: (-\infty, -1) \to R; f(m) = \frac{-3m^2+4m+4}{(m+1)^2}$ **1p**

calculează $f'(m) = \frac{-3m^2-6m}{(m+1)^2}$;

rezolvă ecuația $f'(m)=0 \ \to m_1=0$ care nu se află în domeniu, $m_2=-2$ **1p**

f este monoton strict descrescătoare pe $(-\infty, -2]$ și monoton strict crescătoare pe $[-2, -1)$ **1p**

stabilește că $x=-2$ este punct de minim iar $f(-2)=16$ este valoarea minimă a sumei $x_0+y_0+z_0$

.... **1p**

Subiectul 3. Fie funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x^2+mx+n, & x<-1 \\ \frac{x^3+2x^2+3}{x^2+1}, & x \geq -1 \end{cases}$, unde $m, n \in \mathbb{R}$.

a) Determinați numerele reale m și n astfel încât funcția f să fi derivabilă în $x_0=-1$.

b) Pentru $m=\frac{7}{2}$ și $n=\frac{9}{2}$ determinați abscisele punctelor situate pe reprezentarea geometrică a funcției f în care tangenta la graficul funcției f este paralelă cu asimptota spre $+\infty$ la graficul funcției f.

c) Demonstrați că derivata funcției f are o singură rădăcină în intervalul $(0, +\infty)$.

SOLUȚIE:

a) f derivabilă în $x_0=-1 \Rightarrow f$ continuă în $x_0=-1 \Rightarrow l_s(-1)=l_d(-1)=f(-1)$

$$\left.\begin{aligned} l_s &= \lim_{x\nearrow -1} f(x) = \lim_{x\nearrow -1}(x^2+mx+n) = 1-m+n \\ l_d &= \lim_{x\searrow -1} f(x) = \lim_{x\searrow -1} \frac{x^3+2x^2+3}{x^2+1} = 2 \\ f(-1) &= 2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow 1-m+n=2 \Rightarrow n=m+1$$ **1p**

f derivabilă în $x_0=-1 \Rightarrow f_s'(-1)=f_d'(-1)$

$$\left.\begin{aligned} f_s'(-1) &= \lim_{x\nearrow -1}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1} = \lim_{x\nearrow -1}\frac{x^2+mx+m+1-2}{x+1} = \lim_{x\nearrow -1}\frac{(x+1)(x-1+m)}{x+1} = m-2 \\ f_d'(-1) &= \lim_{x\searrow -1}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1} = \lim_{x\searrow -1}\frac{\frac{x^3+2x^2+3}{x^2+1}-2}{x+1} = \lim_{x\searrow -1}\frac{x^3+1}{(x^2+1)(x+1)} = \lim_{x\searrow -1}\frac{x^2-x+1}{x^2+1} = \frac{3}{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow m-2=\frac{3}{2} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \begin{cases} m=\frac{7}{2} \\ n=\frac{9}{2} \end{cases}$ **1p**

b) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x^2+\frac{7}{2}x+\frac{9}{2}, & x<-1 \\ \frac{x^3+2x^2+3}{x^2+1}, & x \geq -1 \end{cases}$.

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^3+2x^2+3}{x^2+1} = +\infty \Rightarrow$ funcția nu prezintă asimptotă orizontală spre $+\infty$

$$\left.\begin{aligned} m &= \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x^3+2x^2+3}{x^2+1}}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^3+2x^2+3}{x^3+x} = 1 \\ n &= \lim_{x\to+\infty}[f(x)-mx] = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^3+2x^2+3}{x^2+1}-x\right] = \lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2-x+3}{x^2+1} = 2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$ dreapta de ecuație $y=x+2$ este asimptota

oblică a funcției spre $+\infty \Rightarrow$ panta asimptotei spre $+\infty$ este $m_a=1$ .... **1p** din a)$\Longrightarrow f$ derivabilă

$$\Longrightarrow f^{'}(x)=\begin{cases}2x+\dfrac{7}{2}, & x<-1\\ \dfrac{x^4+3x^2-2x}{(x^2+1)^2}, & x\geq -1\end{cases}$$

tangenta la graficul funcției f în punctul de abscisă x_0 situat pe graficul funcției f este paralelă cu asimptota spre $+\infty$ a funcției $\Leftrightarrow m_{tg}=m_a \Longrightarrow f^{'}(x_0)=1$

dacă $x\in(-\infty,-1)\Longrightarrow\ f^{'}(x_0)=1 \Leftrightarrow 2x_0+\frac{7}{2}=1 \Leftrightarrow x_0=-\frac{5}{4}\in(-\infty,-1)$;

dacă $x\in[-1,+\infty)\Longrightarrow\ f^{'}(x_0)=1 \Leftrightarrow \frac{x_0^4+3x_0^2-2x_0}{(x_0^2+1)^2}=1 \Leftrightarrow x_0^4+3x_0^2-2x_0=x_0^4+2x_0^2+1 \Leftrightarrow x_0^2-2x_0-1=0 \Longrightarrow$

$\Longrightarrow x_{0_1}=1-\sqrt{2}\in[-1,+\infty)$ și $x_{0_2}=1+\sqrt{2}\in[-1,+\infty)$

$\Longrightarrow x_0\in\left\{-\frac{5}{4},\ 1-\sqrt{2},\ 1+\sqrt{2}\right\}$...**1p**

c) $x\in(0,+\infty)\Longrightarrow f^{'}(x)=\frac{x^4+3x^2-2x}{(x^2+1)^2}$

$$\left.\begin{array}{r} f^{'}(x)=0 \Leftrightarrow \frac{x^4+3x^2-2x}{(x^2+1)^2}=0 \Leftrightarrow x^4+3x^2-2x=0 \Leftrightarrow x\cdot(x^3+3x-2)=0\\ x\in(0,+\infty)\Longrightarrow x>0\Longrightarrow x\neq 0\end{array}\right\}\Longrightarrow x^3+3x-2=0$$ **1p**

Considerăm funcția $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R},\ g(x)=x^3+3x-2$.

Funcția g continuă pe $(0,+\infty)\Longrightarrow g$ are proprietatea lui Darboux pe $(0,+\infty)$

Cum $\lim\limits_{x\searrow 0} g(x)\cdot\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=-2\cdot(+\infty)=-\infty<0 \Rightarrow$ ecuația $g(x)=0$ are cel puțin o soluție în intervalul$(0,+\infty)$...**1p**

$g^{'}(x)=(x^3+3x-2)^{'}=3x^2+3>0,(\forall)x\in(0,+\infty)\Rightarrow g$ strict crescătoare pe $(0,+\infty)\Rightarrow g$ injectivă $\Rightarrow$ ecuația $g(x)=0$ are cel mult o soluție în intervalul $(0,+\infty)\Rightarrow$ ecuația $g(x)=0$ are o singură soluție în intervalul $(0,+\infty)\Rightarrow$
$\Rightarrow$ derivata funcției f are o singură rădăcină în intervalul $(0,+\infty)$..**1p**

Subiectul 4. După ce a observat o dronă la nivelul ferestrei unde se afla cazat, considerat nivelul 0, Andrei se hotărăște să o urmărească timp de 5 minute. Drona se deplasează pe verticală după legea de mișcare $y=\frac{at+1}{t^2+bt+2}$, unde t reprezintă timpul în minute iar a și b sunt parametri reali. Andrei a constatat că există două momente t_1 și t_2 în care drona se află la cea mai mică, respectiv cea mai mare înălțime, suma momentelor este 4 iar suma cuburilor lor este 28.

a) Aflați $t_1 și\ t_2$.
b) Determinați valorile parametrilor reali a și b în condițiile date.
c) De câte ori trece drona prin dreptul ferestrei lui Andrei în cele 5 minute?

SOLUȚIE:

a) $\begin{cases}t_1+t_2=4\\ t_1^3+t_2^3=28\end{cases}\to\begin{cases}t_1+t_2=4\\ (t_1+t_2)[(t_1+t_2)^2-3t_1t_2]=28\end{cases}\to\begin{cases}t_1+t_2=4\\ t_1t_2=3\end{cases}$
$\to t_1=1, t_2=3$ **1p**

b) $f:[0,5]\to R,\ f(t)=\frac{at+1}{t^2+bt+2}$;
$t_1=1, t_2=3$ - puncte de extrem $\to f'(1)=0, f'(3)=0$ **1p**
$f'(t)=\frac{-at^2-2t+2a-b}{(t^2+bt+2)^2}$ **1p**

obține sistemul $\begin{cases}a-b=2\\ -7a-b=6\end{cases}$ cu soluția $a=-\frac{1}{2}; b=-\frac{5}{2}$ **1p**

c) $f(t)=\frac{-t+2}{2t^2-5t+4}, f'(t)=\frac{2t^2-8t+6}{(2t^2-5t+4)^2}$ **1p**
f este monoton strict crescătoare pe $[0,1]\to\frac{1}{2}\leq f(x)\leq 1$;
f este monoton strict descrescătoare pe $[1,3]\to 1\geq f(x)\geq -\frac{1}{7}$;
f este monoton strict crescătoare pe $[3,5]\to -\frac{1}{7}\leq f(x)\leq -\frac{3}{29}$
.... **1p**
drona trece o singură dată prin dreptul ferestrei ($f(2)=0$) **1p**

Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.