MINISTERUL EDUCAȚIEI

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

CONCURSUL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "*ADOLF HAIMOVICI*"

ETAPA NAȚIONALĂ
24 mai 2024

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE
Clasa a XII–a – Secțiunea H2 – Profil real, specializarea științe ale naturii

Subiectul 1.

Pe mulțimea $G = [1,\infty)$ definim legea de $x * y = \sqrt{x^2 + y^2 - 1}, x, y \in G$.

a) Arătați că legea este corect definită.
b) Verificați dacă legea este asociativă și determinați mulțimea elementelor inversabile în raport cu legea "$*$".
c) Considerăm mulțimea $A = \{(x,y), x,y \in \mathbb{N}^* | x * y \in \mathbb{N}\}$ și $B = \{(x,y), x,y \in \mathbb{N}^* | x * y \notin \mathbb{N}\}$. Arătați că mulțimile A și B sunt infinite.

SOLUȚIE:

a) $x, y \in G \Rightarrow x \geq 1, y \geq 1 \Rightarrow x * y = \sqrt{x^2 + y^2 - 1} \geq 1 \Rightarrow x * y \in G$ **1p**

b) $(x * y) * z = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - 2},\ x * (y * z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - 2} \Rightarrow (x * y) * z = x * (y * z), \forall x, y, z \in G$
$\Rightarrow$ "$*$" este asociativă **1p**
$e = 1 \in G$ **1p**
Fie $x \in G$ inversabil, $\exists x' \in G$ cu $x * x' = x' * x = 1 \Rightarrow x' = \sqrt{2 - x^2} \in G \Rightarrow x^2 \leq 1, x \in G \Rightarrow x = 1$ **1p**

c) $x = n,\ n \in \mathbb{N}^*, y = 1 \Rightarrow x * y = n \in \mathbb{N} \Rightarrow (n, 1) \in A, \forall n \in \mathbb{N}^*$, deci A este infinită **1p**
$x = 10n,\ n \in \mathbb{N}^*, y = 2 \Rightarrow x * y = \sqrt{100n^2 + 3} \notin \mathbb{N} \Rightarrow (10n, 2) \in B, \forall n \in \mathbb{N}^*$(deoarece pătratele perfecte nu pot avea ultima cifră 3), deci B este infinită **2p**

Subiectul 2.

Considerăm ecuația $x^3 - 3x^2 + 4x - 1 = 0$, cu rădăcinile $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{C}$.

a) Calculați: $S = (x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + (x_3 - x_1)^2$.
b) Arătați că ecuația dată are o singură rădăcină reală.
c) Arătați că rădăcinile din $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ au partea reală în intervalul $\left(1, \frac{3}{2}\right)$.
d) Demonstrați că $N = \frac{1}{x_1^3} + \frac{1}{x_2^3} + \frac{1}{x_3^3} \in \mathbb{N}$.

SOLUȚIE:

a) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3) = 9 - 8 = 1$ **1p**
$S = (x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + (x_3 - x_1)^2 = 2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) - 2(x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3) = -6$ **1p**

b) Deoarece $S = -6 < 0 \Rightarrow$ cel puțin unul din termenii $(x_1 - x_2), (x_2 - x_3), (x_3 - x_1)$ este din $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$,
Deci ecuația are cel puțin o rădăcină complexă nereală. Deoarece ecuația are coeficienți reali, admite și conjugata acestei rădăcini, deci are două rădăcini complexe nereale. Fiind ecuație de grad 3, a treia rădăcină este reală.... **1p**

c) Fie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^3 - 3x^2 + 4x - 1$, funcție continuă.
Fie x_1 rădăcina reală, cum $f(0) = -1, f(1) = 1 \Rightarrow x_1 \in (0,1)$ **1p**
Dacă $x_2 = a + bi, x_3 = a - bi, a, b \in \mathbb{R}, b \neq 0,\ x_1 + x_2 + x_3 = 3 \Rightarrow 2a + x_1 = 3$
Cum $x_1 \in (0,1) \Rightarrow a = \frac{3 - x_1}{2} \in \left(1, \frac{3}{2}\right)$ **1p**

d) x_1 rădăcină pentru ecuație $\Rightarrow x_1^3 - 3x_1^2 + 4x_1 - 1 = 0$. Deoarece $x_1, x_2, x_3 \neq 0$, împărțim ecuația la $x_1^3 \Rightarrow$
$\frac{1}{x_1^3} = 1 - \frac{3}{x_1} + \frac{4}{x_1^2}$, analog $\frac{1}{x_2^3} = 1 - \frac{3}{x_2} + \frac{4}{x_2^2}$, $\frac{1}{x_3^3} = 1 - \frac{3}{x_3} + \frac{4}{x_3^2} \Rightarrow$
$N = 3 - 3\left(\frac{x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3}{x_1 x_2 x_3}\right) + 4\frac{(x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3)^2 - 2 x_1 x_2 x_3 (x_1 + x_2 + x_3)}{(x_1 x_2 x_3)^2} = 31 \in \mathbb{N}$ **2p**

Subiectul 3.

Fie $a \in \mathbb{R}, a > 0$.

a) Arătați că $\int_0^a te^t dt = ae^a - \int_0^a e^t dt$.

b) Fie $n \in \mathbb{N}^*$ și $I_n = \int_0^a \frac{(a-t)^n}{n!} e^t dt$. Demonstrați că $I_n = \frac{a^{n+1}}{(n+1)!} + I_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

c) Demonstrați că pentru $\forall n \in \mathbb{N}^*$are loc egalitatea $e^a = 1 + a + \frac{a^2}{2!} + \frac{a^3}{3!} + \cdots + \frac{a^n}{n!} + I_n$.

SOLUȚIE:

a) $\int_0^a te^t dt = te^t|_0^a - \int_0^a e^t dt = ae^a - \int_0^a e^t dt$ 2p

b) $I_n = \int_0^a \frac{(a-t)^n}{n!} e^t dt = - \int_0^a \frac{\left((a-t)^{n+1}\right)'}{(n+1)!} e^t dt = -\frac{(a-t)^{n+1}}{(n+1)!} e^t \Big|_0^a + \int_0^a \frac{(a-t)^{n+1}}{(n+1)!} e^t dt = \frac{a^{n+1}}{(n+1)!} + I_{n+1}$ 2p

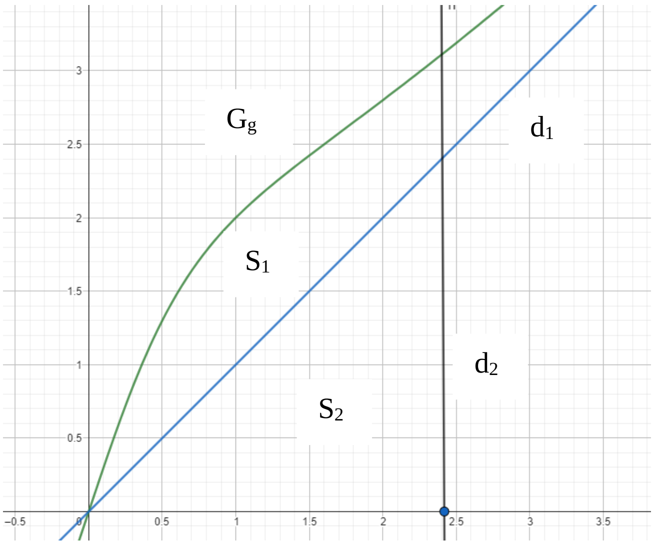
c) $I_1 = \frac{a^2}{2!} + I_2, I_2 = \frac{a^3}{3!} + I_3, \dots, I_{n-1} = \frac{a^n}{n!} + I_n \Rightarrow I_1 = \frac{a^2}{2!} + \frac{a^3}{3!} + \cdots + \frac{a^n}{n!} + I_n$ 1p

$I_1 = \int_0^a \frac{(a-t)^1}{1!} e^t dt = -a + e^a - 1$ 1p

Deci, $e^a = 1 + a + \frac{a^2}{2!} + \frac{a^3}{3!} + \cdots + \frac{a^n}{n!} + I_n$ 1p

Subiectul 4.

O piesă metalică este confecționată din tablă de două tipuri, aluminiu și oțel. Suprafața de aluminiu este notată cu S_1 și este delimitată de funcția $g: [0, \infty) \to \mathbb{R}, g(x) = \frac{x^3+3x}{x^2+1}$ și dreptele $d_1: y = x, d_2: x = a, a \in \mathbb{R}, a > 1$. Suprafața de oțel este notată cu S_2 și este delimitată de axa Ox și dreptele $d_1: y = x, d_2: x = a, a \in \mathbb{R}, a > 1$, ca în figura alăturată. Piesa este bine confecționată, dacă cele două suprafețe au ariile egale.



a) Calculați în funcție de a ariile suprafețelor S_1 și S_2.

b) Fie funcția $f: [0, \infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \ln(x^2 + 1) - \frac{x^2}{2}$. Arătați că ecuația $f(x) = 0$ are o singură rădăcină reală mai mare decât 1.

c) Determinați partea întreagă a numărului real a pentru care piesa este bine confecționată.

SOLUȚIE:

a) Determinăm intersecția graficului lui g cu dreapta d_1, $g(x) = x \Rightarrow x = 0$, deci

$A(S_1) = \int_0^a |g(x) - x| dx = \int_0^a \frac{2x}{x^2+1} dx = \ln(a^2 + 1)$ 1p

$A(S_2) = \int_0^a |x| dx = \frac{a^2}{2}$ 1p

b) Funcția $f: [0, \infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \ln(x^2 + 1) - \frac{x^2}{2}$ este derivabilă pe $[0, \infty)$, $f'(x) = \frac{x(1-x^2)}{x^2+1}$ 1p

$f'(x) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 1, f(0) = 0, f(1) = ln2 - \frac{1}{2}, \lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$ 1p

$f(1) > 0, f'(x) < 0, x \in (1, \infty) \Rightarrow f$ este strict crescătoare pe $(1, \infty)$, $\lim_{x\to\infty} f(x) < 0$, f continuă pe$[1, \infty)$, deci există și este unic $\alpha \in (1, \infty)$, pentru care $f(\alpha) = 0$ 1p

c) $Aria(S_1) = Aria(S_2) \Rightarrow \ln(a^2 + 1) = \frac{a^2}{2} \Rightarrow f(a) = 0, a > 1$, conform punctului b) există și este unic $\alpha \in (1, \infty)$, pentru care $f(\alpha) = 0 \Rightarrow a = \alpha$ 1p

$f(1) > 0, f(2) = ln5 - 2 = \ln\left(\frac{5}{e^2}\right) < ln1 = 0 \Rightarrow \alpha \in (1,2) \Rightarrow$ partea întreagă a lui α este 1........................ 1p

Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.