MINISTERUL EDUCAȚIEI

CONCURSUL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

ETAPA NAȚIONALĂ
24 mai 2024

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE
Clasa a IX–a – Secțiunea H2 – Profil real, specializarea științe ale naturii

Subiectul 1. a) Fie $m \in Z$ și funcția $f : R \to R, f(x) = x^2 - mx - m(m+1)$. Aflați valorile numărului întreg *m*, pentru care mulțimea $\{x \in N \mid f(x) \vdots 5\} \cap \{1,2,3,4,5\}$ are exact două elemente.

b) Fie x și y numere reale astfel încât $x^2 - xy - y^2 = 1$. Determinați minimul și maximul expresiei $\frac{y-2}{x}$.

SOLUȚIE:

a) Notăm cu $A = \{x \in N \mid f(x) \vdots 5\} \cap \{1,2,3,4,5\}$

Dacă $m = 5k, k \in Z$, atunci $5 \mid f(x) = x^2 - 5kx - 5k(5k+1) \Leftrightarrow 5 / x$. Rezultă că $A = \{5\}$ ……….......…1p

Dacă $m = 5k+1$, atunci $5 | f(x) = x^2 - (5k+1)x - (5k+1)(5k+2) \Leftrightarrow 5 | (x^2 - x - 2)$.

Deoarece $x \in \{1,2,3,4,5\}$, se obține $A = \{2,4\}$ care satisface condițiile problemei. ……….....………1p

Se procedează asemănător pentru cazurile următoare: $m = 5k+2$ și $m = 5k+3$ și se obține $A = \varnothing$.

În cazul $m = 5k+4$ se obține $A = \{4,5\}$ care corespunde cerinței problemei………………....………1p

În concluzie $m \in \{5k+1 \mid k \in Z\} \cup \{5k+4 \mid k \in Z\}$ ………………………………………......……….1p

b) Pentru $x \neq 0$ (dacă $x = 0$, s-ar obține $-y^2 = 1$ ceea ce este imposibil) notăm cu $t = \frac{y-2}{x}$, iar condiția din ipoteză devine $x^2(t^2+t-1) + 2x(2t+1) + 5 = 0$, $x \in R \setminus \{0\}$ ……………………......…………………..1p

Din $\Delta_x = -4t^2 - 4t + 24 \geq 0$ și pentru $t^2 + t - 1 \neq 0$ sau $t^2 + t - 1 = 0$, obținem în final că $t \in [-3,2]$…...1p

În concluzie, $\min\left(\frac{y-2}{x}\right) = -3$ se obține pentru $x = 1, y = -1$, iar $\max\left(\frac{y-2}{x}\right) = 2$ pentru $x = -1, y = 0$ **1p**

Subiectul 2. a) Fie x și y numere reale pozitive care satisfac relația $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1$.

Demonstrați inegalitatea: $(x+y)^3 - x^3 - y^3 \geq 48$.

b) Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ un șir neconstant cu proprietatea $\frac{a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n}{n} = \frac{a_{n+1}}{3}$ pentru $(\forall) n \geq 1$.

Să se arate că șirul $(b_n)_{n\geq 1}$ definit prin $b_n = \frac{a_n}{n}$ este o progresie aritmetică.

SOLUȚIE:

a) Din ipoteză avem: $xy = x + y \geq 2\sqrt{xy}$ și prin urmare $xy \geq 4$ ……………………………………...…….1p

$(x+y)^3 - x^3 - y^3 = 3x^2y + 3xy^2 = 3xy(x+y) \geq 3 \cdot 4 \cdot 4 = 48$ ……………………………………...…..1p

Egalitatea are loc pentru $x = y = 2$ ………………………………………………………………...……..1p

b) $\frac{a_{n+1}}{3} - \frac{a_n}{3} = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n}{n} - \frac{a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{n-1}}{n-1} = \frac{2}{3n} a_n$ ……………………………………...…..1p

Rezultă $a_{n+1} = \frac{n+2}{n} a_n \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{n+1} = \frac{n+2}{n+1} \cdot \frac{a_n}{n} \Rightarrow b_{n+1} = \frac{n+2}{n+1} \cdot b_n$ (1)………………………………………1p

Din $b_{n+1} = \frac{n+2}{n+1} \cdot b_n$ rezultă că $b_n = \frac{n+1}{n} \cdot b_{n-1}$ și prin urmare $b_{n-1} = \frac{n}{n+1} \cdot b_n, (\forall) n \geq 2$ ………………..……...……1p

În concluzie $b_{n+1} + b_{n-1} = \frac{n+2}{n+1} \cdot b_n + \frac{n}{n+1} \cdot b_n = 2 \cdot b_n, (\forall) n \geq 2$ c.c.t.d.…………………………...……………1p

Subiectul 3.

a) Fie *ABC* un triunghi ascuțitunghic cu ortocentrul *H*. Dacă pentru orice punct *M* din planul triunghiului există relația $3\overrightarrow{MH}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}$, demonstrați că triunghiul *ABC* este echilateral.

b) În pătratul *ABCD*, bisectoarea unghiului $\angle ACB$ intersectează latura *AB* în *E* și diagonala *BD* în *M*. Perpendiculara în *M* pe *CE* intersectează diagonala *AC* în punctul *X* și latura *AD* în punctul *Y*, iar mediatoarea segmentului *CE* intersectează pe *AC* în punctul *Z*. Demonstrați că $\overrightarrow{ZX}=\overrightarrow{ZE}+\overrightarrow{ZC}+\overrightarrow{ZY}$.

SOLUȚIE:

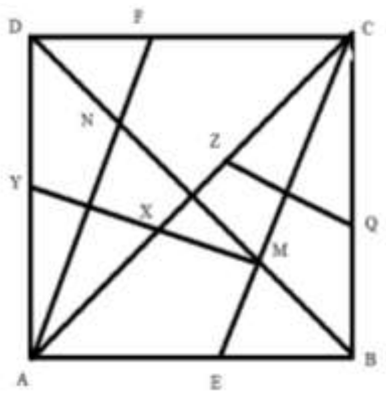
a) Se arată că $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}$ iar apoi

$\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AA'}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$, $\overrightarrow{BG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BB'}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC})$, $\overrightarrow{CG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CC'}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB})$, unde A', B', C'sunt mijloacele laturilor BC, CA și respectiv, *AB*.

Rezultă $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{O}$ și avem $3\overrightarrow{MG}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}$ (1)……………………………………………**1p**

Din relaţia din enunţ şi relaţia (1) rezultă $\overrightarrow{MH}=\overrightarrow{MG}$, adică *G=H*………………………………………………**1p**

Cum medianele sunt şi înălţimi, rezultă că *AB=BC=CA*, rezultă că triunghiul *ABC* este echilateral. ……..…**1p**



b) Notăm cu *N* și *F* punctele în care bisectoarea unghiului $\angle CAD$ intersectează diagonala *BD*, respectiv latura *BC* și cu *Q* punctul de intersecție cu *BC* a mediatoarei segmentului *CE*.

Patrulaterul *CZEQ* este romb (1)……………………………..…...……**1p**

Din motive de simetrie *AMCN* este paralelogram, iar *AECF* este tot paralelogram. ………………..………**1p**

Trapezele *MCFN* și *MEAN* sunt trapeze isoscele congruente și rezultă că *AM=MF*.

MY este mediatoarea lui *AF* și deoarece *XY=ZQ* și *XY* || *ZQ* , rezultă că *XYZQ* este paralelogram(2)……**1p**

Din (1) și (2) avem: $\overrightarrow{ZE}+\overrightarrow{ZC}+\overrightarrow{ZY}=\overrightarrow{ZQ}+\overrightarrow{ZY}=\overrightarrow{ZX}$ ……………………………………………..**1p**

Subiectul 4. Jack London povestește cum a călătorit din Skagway (oraș din Alaska) într-o sanie trasă de 5 câini husky, pentru a ajunge la tabăra unde un camarad era pe moarte. Timp de 24 de ore, câinii husky au tras sania cu viteză maximă. Apoi 2 câini au fugit cu o haită de lupi. Sania lui Jack London, rămasă cu 3 câini, a încetinit proporțional. A ajuns la tabără cu 48 de ore mai târziu decât și-a planificat. Dacă cei doi câini husky fugari ar mai fi rămas înhămați pentru încă 50 de mile, scrie Jack London, ar fi întârziat cu numai 24 de ore.
La ce depărtare de Skagway era tabăra?

SOLUȚIE:

Dacă notăm:
D=distanţa de la Skagway la tabără, t=timpul în care ar fia ajuns cu cei 5 câini,v_5 = viteza maximă (cu 5 câini) și v_3 = viteza minimă (cu 3 câini) atunci avem:

$\frac{v_3}{v_5}=\frac{3}{5}$ (1)

$D=t\cdot v_5$ (2)

Întârzierea de 48 ore: $D=24\cdot v_5+[(t-24)+\mathbf{48}]\cdot v_3$ (3)..**2p**

Din (1), (2), (3) rezultă $t=96$ ore $=4$ zile.. **2p**

Dacă cei 2 câini ar mai fi rămas 50 mile, evaluăm timpul:

$$t+24=24+\frac{50}{v_5}+\frac{D-(50+24\cdot v_5)}{v_3}$$

de unde găsim $v_5=\frac{25}{18}$ *mile/oră* și $v_3=\frac{5}{6}$ *mile/oră*...**2p**

În concluzie, $D=96\cdot\frac{25}{18}=\frac{400}{3}=133\frac{1}{3}=133{,}33$ *mile*…………………………………………**1p**

Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.