MINISTERUL EDUCAȚIEI

CONCURSUL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

ETAPA NAȚIONALĂ
24 mai 2024

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE
Clasa a IX–a – Secțiunea H1 – Filieră tehnologică

Subiectul 1.

Fie familia de funcții $f_m: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$, $f_m(x) = (m+1)x^2 - 2mx + m + 3$, $m \in \boldsymbol{R} \setminus \{-1\}$.

a) Ordonați crescător numerele $f_{-2}(1+\sqrt{2})$, $f_{-2}(1+\sqrt{3})$ și $f_{-2}(3)$.

b) Determinați cel mai mic număr întreg m pentru care $f_m(x) > 0, \forall x \in \boldsymbol{R}$.

SOLUȚIE:

a) $f_{-2}(x) = -x^2 + 4x + 1$, $a = -1 < 0$, funcția f_{-2} este strict descrescătoare pe $(2, +\infty)$ 1p

cum $2 < 1+\sqrt{2} < 1+\sqrt{3} < 3 \Rightarrow f_{-2}(3) < f_{-2}(1+\sqrt{3}) < f_{-2}(1+\sqrt{2})$ ....2 p

b) $a = m+1 > 0$ și $\Delta = -16m - 12 < 0$ ....2 p

$m \in \left\{(-1, +\infty) \cap \left(-\frac{3}{4}, +\infty\right)\right\} \cap Z$..1 p

Cel mai mic număr întreg este $m = 0$ ....1 p

Subiectul 2.

În interiorul triunghiului ABC se consideră un punct M astfel încât $\sphericalangle MAB = \sphericalangle MBC = \sphericalangle MCA = x$, iar $ctgx = 4ctg(\sphericalangle BAC)$. Folosind, inegalitatea $(ax+by)^2 \le (a^2+b^2)(x^2+y^2)$, arătați că $cos^2B + cos^2C \ge \frac{3}{5}$.

SOLUȚIE:

Aplică teorema cosinusului, $AM^2 = CA^2 + CM^2 - 2CA \cdot CM \cdot cosx$, $BM^2 = AB^2 + AM^2 - 2AB \cdot AM \cdot cosx$,

$CM^2 = BC^2 + BM^2 - 2BC \cdot BM \cdot cosx$ ....1 p

Prin adunare, obține $2(AB \cdot AM + CA \cdot CM + BC \cdot BM) \cdot cosx = AB^2 + BC^2 + AC^2$ (1) .... 1 p

$A_{[ABC]} = A_{[MAB]} + A_{[MBC]} + A_{[MAC]} \Rightarrow A_{[ABC]} = \frac{1}{2}(AB \cdot AM + CA \cdot CM + BC \cdot BM) \cdot sinx$ (2) ....1 p

Din (1) și (2) deduce $ctgx = \frac{AB^2+BC^2+AC^2}{4A_{[ABC]}} = \frac{AB^2+BC^2+AC^2}{2AB \cdot AC \cdot sin(\sphericalangle BAC)} = 4ctg(\sphericalangle BAC)$ 1p

$\Rightarrow AB^2 + BC^2 + AC^2 = 8AB \cdot AC \cdot cos(\sphericalangle BAC)$, cum $cos(\sphericalangle BAC) = \frac{AB^2+AC^2-BC^2}{2AB \cdot AC} \Rightarrow AB^2 + AC^2 = \frac{5}{3}BC^2$..............1p

Se arată $BC = AB \cdot cosB + AC \cdot cosC$..1p

$(AB \cdot cosB + AC \cdot cosC)^2 \le (AB^2 + AC^2)(cos^2B + cos^2C \Rightarrow BC^2 \le \frac{5}{3}BC^2(cos^2B + cos^2C) \Rightarrow$

$cos^2B + cos^2C \ge \frac{3}{5}$ 1p

Subiectul 3.

Pe parcursul desfăşurării unui experiment, temperatura unui corp (măsurată în °C) în funcţie de timp (măsurat în ore) variază după legea : $T:[0, f] \to \mathbb{R},\ T(x)=\begin{cases} 8-x, & 0\le x\le 4 \\ 2x-4, & 4<x\le f \end{cases}$. Experimentul se încheie în momentul în care temperatura corpului revine la temperatura din momentul iniţial.

a) Să se determine temperatura minimă la care ajunge corpul pe parcursul experimentului

b) Să se stabilească după câte ore se încheie experimentul.

c) Se ştie că aria mărginită de graficul legii de variaţie a temperaturii unui corp şi axa Ox reprezintă energia termică totală transferată între corp şi mediu. Să se determine energia termică totală (E) degajată sau absorbită de corp pe parcursul întregului experiment.

SOLUȚIE:

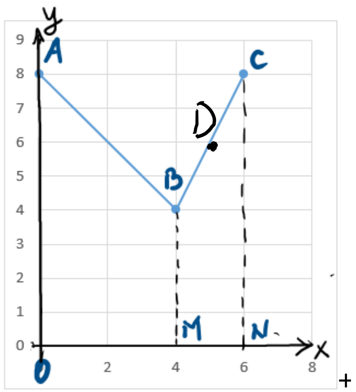
a) pentru $0\le x<4$, funcția este descrescătoare iar pentru $4\le x\le f$ funcția este crescătoare,
deci temperatura minimă a corpului este atinsă în $x=4$ unde vom avea $T(4)=8-4=4°C$ **1p**

b) Temperatura inţială este $T(0)=8$, iar cea finală este $T(f)=2f-4$..**1p**

Avem $T(f)=T(0) \Leftrightarrow 2f-4=8 \Leftrightarrow 2f=12 \Leftrightarrow f=6$ ore...1p

c) Calculează $T(0)=2\cdot 0+2=2;\ T(4)=4; T(5)=6;\ T(6)=8$. şi reprezintă grafic funcţia cu ajutorul punctelor $A(0;8)$, $B(4;4)$, $C(6;8)$, $D(5;6)$ **1p**

Suprafaţa mărginită de graficul funcţiei şi axa Ox este formată din 2 trapeze dreptunghice OAMB şi MBCN cu M(4 ; 0) şi N(6 ; 8) 1p



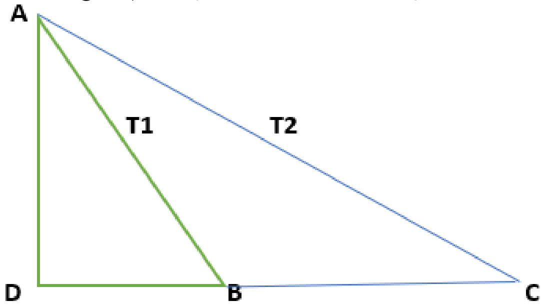
Calculează $A_{OABM}=\dfrac{(OA+BM)\,OM}{2}=\dfrac{(8+4)\bullet 4}{2}=24\,J$ şi

$A_{MBCN}=\dfrac{(CN+BM)\,MN}{2}=\dfrac{(8+4)\bullet 2}{2}=12\,J$ 1p

Deci energia termică totală va fi $E=A_{OABM}+A_{MBCN}=24\,J+12\,J=36\,J$. 1p

Subiectul 4.

În parcul Aventura de la HAMAK (Iaşi), 2 trasee de tiroliană (T1 şi T2) pornesc din punctul A situat pe o platfomă la înălţimea $H=20\sqrt{3}$ faţă de sol şi ajung în punctele B şi C, coliniare cu baza D a platformei din care pleacă cele 2 trasee (ca în figură). Se ştie că traseele T1 şi T2 au unghuirile de cădere $\widehat{ABD}$ şi $\widehat{ACD}$ de 60°, respectiv 30° faţă de sol.



a) Să se demonstreze că lungimea tirolienei T1 (A-B) este egală cu distanţa dintre punctele de sosire de la sol (B-C).

b) Tirolienele sunt supravegheate de 2 angajaţi care ajută turiştii să îşi scoată echipamentul de protecţie după ce ajung pe sol. Aceştia pornesc simultan din punctul D către punctele B, respectiv C. Primul dintre ei de seplasează cu viteza constantă de 1,5 m/s. Cu ce viteză ar trebui să se deplaseze al doilea angajat pentru a ajunge în punctul C în acelaşi moment în care primul ajunge în punctul B? (viteza = distanţa parcursă/timpul necesar parcurgerii distanţei)

c) Doi turişti parcurg traseele B-D-A-C respectiv C-D-A-B. Dacă turiştii au viteze medii egale şi pornesc în acelaşi moment pe trasee, care dintre ei işi încheie primul traseul ?

SOLUȚIE:

a) În ΔABC avem că $\widehat{ABD}$ este unghi exterior, deci $\widehat{ABD}=\widehat{BAC}+\widehat{ACB}\Rightarrow\widehat{BAC}=60^\circ-30^\circ=30^\circ=\widehat{ACB}$.
Deci ΔABC isoscel cu AB = BC. 1p

b) În ΔDAB, $\cos\widehat{DAB}=\frac{AD}{AB}\Rightarrow AB=\frac{AD}{\cos 30^\circ}=40=BC$ şi

În $\Delta ADC,\ tg\widehat{C}=\frac{AD}{DC}\Leftrightarrow\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{20\sqrt{3}}{DC}\Leftrightarrow DC=60,\ deci\ DB=20$ ………………..……………........................…....……1p

Vom avea $v_1=\frac{DB}{t}$, $v_2=\frac{DC}{t}\Rightarrow t=\frac{DB}{v_1}=\frac{DC}{v_2}\Rightarrow v_2=\frac{v_1\cdot DC}{DB}=\frac{1,5\cdot 60}{20}=4,5\ m/s$ ……………..….........................1p

c) Calculează AC şi lungimile celor 2 trasee: $AC=\sin 30^\circ\cdot AD=40\sqrt{3}$ ($\hat{i}n\ \Delta ADC$) 1p

$L_1=BD+DA+AC=20+20\sqrt{3}+40\sqrt{3}=20+60\sqrt{3}$, $L_2=CD+DA+AB=60+20\sqrt{3}+40=100+20\sqrt{3}$ …...................……1p

$L_1-L_2=\left(20+60\sqrt{3}\right)-\left(100+20\sqrt{3}\right)=-80+40\sqrt{3}=40\left(-2+\sqrt{3}\right)<0$ deci $L_1<L_2$ 1p

$Vm_1=Vm_2\Rightarrow\frac{L_1}{t_1}=\frac{L_2}{t_2}\Rightarrow L_1\cdot t_2=L_2\cdot t_1$ deci din $L_1<L_2\Rightarrow t_2>t_1$, deci turistul de pe primul traseu încheie primul ......1p.

Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.