

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ „ADOLF HAIMOVICI”

Ediția a XXVII-a

ETAPA NAȚIONALĂ – 17 mai 2025

Clasa a X-a – Secțiunea H1 – Filieră tehnologică

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

Subiectul 1.

Fie funcția $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, f(z) = 3z - 2\bar{z}$.

- a) Determinați toate numerele complexe z cu modulul egal cu 1 care verifică egalitatea $f(z) = 5z$.
- b) Calculați $(f \circ f)(z)$.
- c) Să se demonstreze că $\left(\underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{\text{de } n \text{ ori}} \right)(z) = \frac{5^n+1}{2}z - \frac{5^n-1}{2}\bar{z}$, pentru orice număr complex z și pentru orice număr natural $n \geq 2$.

SOLUȚIE:

- a) $|z| = 1 \Rightarrow \bar{z} = \frac{1}{z}$ 1p
Obține $z^2 = -1 \Leftrightarrow z \in \{-i, i\}$1p
- b) $(f \circ f)(z) = f(f(z)) = 3f(z) - 2\overline{f(z)}$1p
 $(f \circ f)(z) = 13z - 12\bar{z}$1p
- c) Verificare: $P(2) : (f \circ f)(z) = \frac{5^2+1}{2}z - \frac{5^2-1}{2}\bar{z} = 13z - 12\bar{z}$ (A).....1p
Demonstrația: $P(k) \Rightarrow P(k+1)$
 $\left(\underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{\text{de } k+1 \text{ ori}} \right)(z) = \frac{5^{k+1}+1}{2}f(z) - \frac{5^{k+1}-1}{2}\overline{f(z)}$1p
 $\left(\underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{\text{de } k+1 \text{ ori}} \right)(z) = \frac{5^{k+1}+1}{2}z - \frac{5^{k+1}-1}{2}\bar{z}$ (A), rezultă $P(n)$ adevărată, pentru orice $n \geq 2$1p

Subiectul 2.

Se consideră binomul $\left(\frac{\sqrt[3]{x}}{y} + \frac{y}{\sqrt{x}} \right)^n$, $n \in \mathbb{N}^*$, $x \in \mathbb{R}_+^*$, $y \in \mathbb{R}^*$.

- a) Determinați rangul termenului dezvoltării care îl conține pe $\frac{1}{x\sqrt{x}}$, știind că n este cel mai mare număr natural care verifică inegalitatea $\log_{\frac{1}{3}} n + \log_{\frac{n}{3}} n > 0$, $n \neq 3$.
- b) Pentru $x = 2^{12}$ și $y = 2^5$ determinați numărul natural n astfel încât cel mai mare termen al dezvoltării să fie T_{49} .

SOLUȚIE:

- a) Obține $\log_{\frac{1}{3}} n + \frac{\log_{\frac{1}{3}} n}{\log_{\frac{1}{3}} n + 1} > 0 \Leftrightarrow \frac{t^2+2t}{t+1} > 0$, unde $t = \log_{\frac{1}{3}} n$1p
Obține $t \in (-2, -1) \cup (0, \infty)$ de unde determină $n=8$1p
Calculează $T_{k+1} = C_8^k x^{\frac{16-5k}{6}} y^{2k-8}$1p
Din $\frac{16-5k}{6} = -\frac{3}{2}$ obține $k=5$, de unde T_6 este termenul căutat.....1p
- b) Pentru $x = 2^{12}$ și $y = 2^5$ obține binomul $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right)^n$1p
Din $T_{49} > T_{50} \Leftrightarrow C_n^{48} > C_n^{49}$ obține $n < 97$1p

Din $T_{49} > T_{48} \Leftrightarrow C_n^{48} > C_n^{47}$ obține $n > 95$; astfel, $n = 96$1p

Subiectul 3.

În reperul cartezian xOy considerăm punctele $A(0, a)$, $B(-c, 0)$ și $C(c, 0)$, unde a și c sunt numere reale strict pozitive.

- Să se determine coordonatele punctului E situat pe AC , unde E este proiecția punctului O pe AC .
- Dacă F este mijlocul segmentului OE , arătați că dreptele AF și BE sunt perpendiculare.

SOLUȚIE:

- Determină $m_{AC} = -\frac{a}{c}$ și din $m_{AC}m_{OE} = -1$ rezultă $m_{OE} = \frac{c}{a}$1p

Scrie ecuațiile dreptelor $AC: y = -\frac{a}{c}x + a$ și $OE: y = \frac{c}{a}x$2p

Rezolvă sistemul format cu aceste ecuații și obține $E\left(\frac{a^2c}{a^2+c^2}, \frac{ac^2}{a^2+c^2}\right)$1p

- Determină $F\left(\frac{x_E}{2}, \frac{y_E}{2}\right)$ și $m_{AF} = -\frac{2a^2+c^2}{ac}$1p

Determină $m_{BE} = \frac{ac}{2a^2+c^2}$1p

$m_{AF}m_{BE} = -1$, deci dreptele AF și BE sunt perpendiculare.....1p

Subiectul 4.

Un părinte își propune să constituie un capital pentru fiul său, de care acesta să poată beneficia după ce va împlini 20 de ani. Pentru aceasta, începând cu momentul în care copilul împlinește un an, până la vârsta de 20 de ani inclusiv (și când împlinește 20 de ani), plătește unei societăți de asigurare câte 2000 de lei în fiecare an. Societatea asigură un beneficiu anual (*dobândă compusă*) de 5%.

- Care este suma care va putea fi ridicată după ce fiul va împlini 20 de ani? (admitem că $1,05^{20} \cong 2,65$, iar părintele plătește suma și când fiul va avea 20 de ani).
- După câți ani suma acumulată în cont este de 6305 lei?

SOLUȚIE:

- Găsește suma acumulată după un an, pentru prima depunere : $S\left(1 + \frac{p}{100}\right)$ unde S este suma depusă anual și p procentul beneficiului.....1p

La prima depunere se adaugă dobândă timp de $n - 1$ ani, deci în final suma va atinge valoarea de $S\left(1 + \frac{p}{100}\right)^{n-1}$1p

Analog, sumele depuse începând cu al doilea an ating valorile $S\left(1 + \frac{p}{100}\right)^{n-2}, \dots, S\left(1 + \frac{p}{100}\right), S$.

Astfel, capitalul final va fi suma acestora: $S_n = S\frac{100}{p}\left[\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n - 1\right]$1p

Pentru $S=2000$, $p=5$ și $n=20$ capitalul final va fi $S_{20} = 66000$1p

- $S_n = 6305 \Leftrightarrow 40000 \cdot \left[\left(1 + \frac{1}{20}\right)^n - 1\right] = 6305$1p

Obține $\left(\frac{21}{20}\right)^n = \frac{1261}{8000} + 1$1p

Găsește $n=3$1p

Notă: Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.