

Concursul Național de Matematică Aplicată „Adolf Haimovici”
Etapă județeană, Iași
08.03.2025

Clasa a XII-a filieră tehnologică – secțiunea H1
Barem de notare și evaluare

Subiectul 1

Fie $A = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ -7 & -5 \end{pmatrix}$ și mulțimea $G = \{X(a) = I_2 + aA, \text{ unde } a \in \mathbb{R} - \{-\frac{1}{2}\}\}$

- a) Demonstrați că $X(a) \cdot X(b) = X(a + b + 2ab)$, $\forall X(a), X(b) \in G$;
b) Admitem că (G, \cdot) este grup abelian. Aflați numărul real m astfel încât funcția $f: (\mathbb{R}^*, \cdot) \rightarrow (G, \cdot)$, $f(x) = X(\frac{x+m}{2})$ este izomorfism de grupuri;
c) Câte perechi de numere întregi de forma (a, b) există, astfel încât $X(a)X(b) = X(5)$?

Soluție:

a) $X(a) \cdot X(b) = (I_2 + aA)(I_2 + bA) = I_2^2 + bI_2A + aAI_2 + abA^2$

$A^2 = \begin{pmatrix} 14 & 10 \\ -14 & -10 \end{pmatrix} = 2A$ 1p

$X(a)X(b) = I_2 + bA + aA + 2abA = I_2 + (a + b + 2ab)A = X(a + b + 2ab)$ 1p

b) Dacă f este izomorfism atunci $f(e_1) = e_2$, unde $e_1 = 1$ este elementul neutru din grupul (\mathbb{R}^*, \cdot) .. 1p
iar $e_2 = X(0)$ este elementul neutru al grupului (G, \cdot) 1p

$f(1) = X(0)$, $f(1) = X(\frac{1+m}{2}) \Rightarrow \frac{1+m}{2} = 0 \Rightarrow m = -1$ 1p

c) $X(a)X(b) = X(5) \Rightarrow a + b + 2ab = 5$

$2(a + \frac{1}{2})(b + \frac{1}{2}) - \frac{1}{2} = 5 \Rightarrow (2a + 1)(2b + 1) = 11$ 1p

$2a + 1, 2b + 1$ sunt divizori întregi ai lui 11

$(a, b) \in \{(0,5); (5,0); (-1,-6); (-6,-1)\} \Rightarrow 4$ perechi. 1p

Subiectul 2

Pe mulțimea \mathbb{Z}_6 se definesc legile de compoziție $x \circ y = x + y + \hat{3}$ și $x * y = xy + \hat{3}x + \hat{3}y$.

- a) Să se demonstreze distributivitatea legii de compoziție “*” față de legea de compoziție “o”.
b) Să se verifice dacă tripletul $(\mathbb{Z}_6, \circ, *)$ este inel comutativ.
c) Să se rezolve în \mathbb{Z}_6 sistemul de ecuații $\begin{cases} x * \hat{2} = \hat{2}y + \hat{3} \\ x \circ y = \hat{5} \end{cases}$.

Soluție:

a) $x * (y \circ z) = xy + xz + \hat{3}y + \hat{3}z + 3$, $\forall x, y, z \in \mathbb{Z}_6$

$(x * y) \circ (x * z) = xy + xz + \hat{3}y + \hat{3}z + 3$, $\forall x, y, z \in \mathbb{Z}_6$ 1p

$x * (y \circ z) = (x * y) \circ (x * z)$, $\forall x, y, z \in \mathbb{Z}_6 \Rightarrow$ legea “*” este distributivă în raport

cu legea de compoziție “o”. 1p

b) (\mathbb{Z}_6, \circ) grup comutativ cu elementul neutru $e_1 = \hat{3}$ și $\forall x \in \mathbb{Z}_6$ este simetrizabil, unde

$x' = -x \in \mathbb{Z}_6$ 1p

$(\mathbb{Z}_6 \setminus \{\hat{3}\}, *)$ este monoid comutativ cu elementul neutru $e_2 = \hat{4}$ 1p

Având în vedere și proprietatea de distributivitate demonstrată la **a)**

$\Rightarrow (\mathbb{Z}_6, \circ, *)$ este inel comutativ 1p

c) $\begin{cases} x * \hat{2} = \hat{2}y + \hat{3} \\ x \circ y = \hat{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \hat{5}x = \hat{2}y + \hat{3} \\ x + y + \hat{3} = \hat{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \hat{5}x = \hat{2}y + \hat{3} \\ x = \hat{2} + \hat{5}y \end{cases}$ 1p

$\Rightarrow \begin{cases} \hat{4} + y = \hat{2}y + \hat{3} \\ x = \hat{2} + \hat{5}y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \hat{1} \\ x = \hat{1} \end{cases}$ 1p

Subiectul 3

Se consideră $I_n = \int_0^1 (x - x^2)^n dx$, pentru $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

a) Să se calculeze I_1 ;

b) Să se arate că $I_n = \frac{n}{2(2n+1)} I_{n-1}$, $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2$;

c) Să se demonstreze că $0 \leq I_n \leq \frac{1}{4^n}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Soluție:

a) $I_1 = \int_0^1 (x - x^2) dx = \frac{1}{6}$ 1p

b) $I_n = \int_0^1 (x)' \cdot (x - x^2)^n dx = -n \int_0^1 (x - 2x^2)(x - x^2)^{n-1} dx =$ 1p

$= -n \int_0^1 (2x - 2x^2 - x)(x - x^2)^n dx = -2nI_n + \frac{n}{2} \int_0^1 2x \cdot (x - x^2)^{n-1} dx =$ 1p

$= -2nI_n - \frac{n}{2} \int_0^1 (x - x^2)'(x - x^2)^{n-1} dx + \frac{n}{2} \int_0^1 (x - x^2)^{n-1} dx =$

$= -2nI_n + \frac{n}{2} I_{n-1} - \frac{n}{2} \int_0^1 t^{n-1} dt = -2nI_n + \frac{n}{2} I_{n-1}$ 1p

$(2n + 1)I_n = \frac{n}{2} I_{n-1} \Rightarrow I_n = \frac{n}{2(2n+1)} I_{n-1}$ 1p

c) Fie funcția de gradul al doilea $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x - x^2$

$x_V = \frac{1}{2}$ punctul de maxim al funcției f și $y_V = \frac{1}{4}$ maximul funcției pe intervalul $[0,1]$

$f(0) = f(1) = 0 \Rightarrow 0 \leq f(x) \leq \frac{1}{4}$

Pentru $\forall x \in [0,1]$ avem $0 \leq x - x^2 \leq \frac{1}{4} \Rightarrow 0 \leq (x - x^2)^n \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ 1p

$\Rightarrow 0(1 - 0) \leq \int_0^1 (x - x^2)^n dx \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n (1 - 0)$, $\forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow 0 \leq I_n \leq \frac{1}{4^n}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$

din aplicarea proprietății de medie a integralei definite 1p

Subiectul 4

În urma unui studiu referitor la memoria elevilor, s-a constatat că numărul de cuvinte noi din vocabularul limbii franceze memorate de un elev în t minute de la începerea unei ore de clasă este dat de $[M(t)]$, partea întreagă a lui $M(t)$, unde $M(t) = |f(t)|$, iar $f: [0,50] \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție derivabilă care verifică pentru orice $t \in [0,50]$ relația $f'(t) = 0,003t^2 - 0,16t$.

- a) Aflați funcția f și numărul de cuvinte memorate de un elev în primele 10 minute ale unei ore de limba franceză.
b) Demonstrați că numărul de cuvinte noi memorate de un elev crește pe parcursul unei ore de clasă și determinați câte cuvinte noi memorează un elev în ultimele 20 minute dintr-o oră de clasă, cu durata de 50 minute.

Soluție:

a) $\int f'(t)dt = \int \left(\frac{3}{1000}t^2 - \frac{16}{100}t \right) dt = \frac{1}{1000}t^3 - \frac{8}{100}t^2 + C \dots\dots\dots 1p$

Știind că $\int f'(t)dt = f(t) + C \Rightarrow f(t) = 0,001t^3 - 0,08t^2 + C \dots\dots\dots 1p$

Deoarece vorbim doar despre cuvintele noi, atunci avem $f(0) = 0 \Rightarrow C = 0 \dots\dots\dots 1p$

Numărul căutat este $[M(10)] = 7 \dots\dots\dots 1p$

b) Se observă că:

$$f(t) = 0,001t^2 \cdot (t - 80) \leq 0, \forall t \in [0,50] \text{ și}$$

$$f'(t) = 0,001t \cdot (3t - 160) < 0, \forall t \in (0,50] \dots\dots\dots 1p$$

$$\text{Deci } M(t) = -f(t) \text{ și } M'(t) = -f'(t) > 0, \forall t \in (0,50]$$

$$\text{Se obține astfel că } M - \text{funcție strict crescătoare și } [M] - \text{funcție crescătoare pe } [0,50] \dots\dots 1p$$

Deoarece

$$M(50) = \left| \frac{1}{1000} \cdot 50^3 - \frac{8}{100} \cdot 50^2 \right| = 75 \text{ și}$$

$$M(30) = \left| \frac{1}{1000} \cdot 30^3 - \frac{8}{100} \cdot 30^2 \right| = 45,$$

$$\text{numărul căutat este } M(50) - M(30) = 75 - 45 = 30 \dots\dots\dots 1p$$