



**Concursul Național de Matematică Aplicată „Adolf Haimovici”**

**Etapa județeană**

**08 martie 2025**

**Clasa a XI –a – Secțiunea H2 - Profil real, specializarea științe ale naturii**

**Subiectul 1**

Două funcții  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , se numesc *prietene* dacă există și este finită limita,  
 $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) + g(x))$ .

a) Arătați că funcțiile  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt[3]{8x^3 - 3x^2}$  și  $g(x) = -2x$  sunt *prietene*.

b) Determinați numerele reale  $a, b$  cu  $a > 0$  astfel încât funcțiile  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$f(x) = \sqrt{ax^2 + x + 4}$  și  $g(x) = -2x + b$  să fie *prietene*.

c) Dați un exemplu de trei funcții  $f, g, h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  astfel încât funcțiile  $f$  și  $h$  respectiv  $g$  și  $h$  să fie *prietene*, dar  $f$  și  $g$  să nu fie *prietene*.

**Subiectul 2**

Considerăm funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x \cdot \left[\frac{1}{x}\right] - 1 & , x < 0 \\ e^x - \cos x - 1 & , x \geq 0 \end{cases}$ , unde  $\left[\frac{1}{x}\right]$  este partea

întreagă a lui  $\frac{1}{x}$ . Arătați că:

a)  $\lim_{x \rightarrow 0} x \left[\frac{1}{x}\right] = 1$ ;

b) Funcția  $f$  nu are proprietate a lui Darboux pe  $\mathbb{R}$ ;

c) Ecuația  $f(x) = 0, x \in \mathbb{R}$  are o infinitate de soluții, cel puțin una pozitivă.

**Subiectul 3**

O matrice  $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$  se numește *interesantă* dacă are suma elementelor de pe diagonala principală egală cu zero. Considerăm matricele  $S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  și

$$M(a, b) = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, a, b \in \mathbb{C}.$$

a) Fie  $A$  o matrice *interesantă*. Arătați că există  $a, b \in \mathbb{C}$  astfel încât toate elementele de pe diagonala principală a matricei  $A - SM(a, b)S^{-1}$  să fie egale cu zero.

b) Arătați că orice matrice *interesantă* poate fi scrisă ca suma a trei matrice nilpotente. (O matrice  $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$  se numește nilpotentă dacă există  $n \in \mathbb{N}^*$  astfel încât  $X^n = O_3$ ).



- c) Dați un exemplu de trei matrice  $X, Y, Z \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$  care să verifice  $X + Y + Z = B$  și  $X^3 = Y^3 = Z^3$  unde  $B = \begin{pmatrix} 2025 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2025 \end{pmatrix}$ .

#### Subiectul 4

Ana vrea să planteze, în grădina sa, trei copaci. Considerăm că suprafața grădinii este raportată la reperul cartezian  $xOy$ , unitatea de măsură, pe axele reperului, fiind egală cu 1m. Un peisagist i-a sugerat să planteze primul copac în punctul  $A(3,0)$ ; al doilea copac să-l planteze pe dreapta ( $d$ ) de ecuație  $4x - y - 12 = 0$ , la o distanță egală cu  $\sqrt{17} m$  față de primul copac; iar ultimul copac să-l planteze pe parabola  $p$  de ecuație  $y = x^2$ .

Ana își dorește ca aria suprafeței triunghiulare determinată de cei trei copaci să fie minimă.

- Ajut-o pe Ana să determine pozițiile celor trei copaci.
- Scrieți ecuația dreptei pe care sunt situați al doilea și al treilea copac.

**Timp de lucru: 3 ore.**

**Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.**