CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
„ADOLF HAIMOVICI”
Ediția a XXVIII-a
ETAPA NAȚIONALĂ – 16 mai 2026
Clasa a IX–a – Secțiunea H1 – Filieră tehnologică

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

Subiectul 1. (*20 puncte*)

Fie familia de funcții $f_m(x)=(m+1)^2x^2-(m^2-1)x+2-3m,\ m\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

a) Dacă x_1 și x_2 sunt rădăcinile ecuației $f_2(x)=0$ calculați valoarea expresiei

$$E=\frac{x_1}{9x_1^2-2x_1-3}+\frac{x_2}{9x_2^2-2x_2-3}.$$

b) Determinați numărul real negativ m pentru care parabola asociată graficului funcției f_m este tangentă la axa Ox.

c) Fie $V(x_V,y_V)$ vârful parabolei asociate graficului funcției f_m. Determinați valorile parametrului real m astfel încât vârful V să fie situat în interiorul dreptunghiului cu centrul în punctul $A\left(\frac{1}{2},6\right)$ și cu laturile paralele cu axele de coordonate astfel: laturile paralele cu *Ox* au lungimea de o unitate, iar laturile paralele cu *Oy* au lungimea de patru unități.

SOLUȚIE:

a) Cum x_1 este rădăcină a ecuației $f_2(x)=0\Rightarrow 9x_1^2=3x_1+4$ 1p

Obține $9x_1^2-2x_1-3=x_1+1,\ 9x_2^2-2x_2-3=x_2+1$ 2p

Calculează $E=\dfrac{S+2P}{S+P+1}$ 2p

Scrie $S=\dfrac{1}{3},P=-\dfrac{4}{9}$ 1p

Obține $E=-\dfrac{5}{8}$. 1p

b) Calculează $\Delta=(m+1)^2(m^2+10m-7)$ 2p

Pune condiția $\Delta=0$ 1p

Obține $m\in\{-1,-5+4\sqrt{2},-5-4\sqrt{2}\}$ 1p

Cum $m\neq-1,m<0$ deduce că $m=-5-4\sqrt{2}$ 1p

c) Dreptunghiul are vârfurile $M(0,4),N(1,4),P(1,8),Q(0,8)$ 2p

$x_V=\dfrac{m-1}{2(m+1)},y_V=-\dfrac{m^2+10m-7}{4}$ 1p

Pune condițiile:

$0<x_V<1\Leftrightarrow m\in(-\infty,-3)\cup(1,\infty)$ 2p

$4<y_V<8\Leftrightarrow m\in(-9,-1)\setminus\{-5\}$ 2p

Obține $m\in(-9,-3)\setminus\{-5\}$ 1p

Subiectul 2. (*20 puncte*)

Se consideră șirurile $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $x_n = \cos n$ și funcția $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{1-x^2}$.

a) Demonstrați că șirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nu este progresie aritmetică.

b) Arătați că numărul $a = x_7 + x_3$ este negativ.

c) Determinați partea întreagă a numărului $b = f\left(\sin\frac{11\pi}{12}\right)+f\left(\cos\frac{5\pi}{12}\right)$.

SOLUȚIE:

a) $x_{n+1}-x_n=-2\sin\frac{1}{2}\sin\frac{2n+1}{2}$, pentru orice $n\in\mathbb{N}$ 2p

Diferența termenilor consecutivi nu este constantă, deci șirul nu este progresie aritmetică....1p

b) $a=\cos 7+\cos 3 = 2\cos 5\cos 2$ 2p

Unghiul de măsură 2 aparține cadranului doi, deci $\cos 2<0$ 1p

Unghiul de măsură 5 aparține cadranului patru, deci $\cos 5>0$....1p

Finalizare: $a<0$ 1p

c) $f\left(\sin\frac{11\pi}{12}\right)=\left|\cos\frac{11\pi}{12}\right|=-\cos\frac{11\pi}{12}=\cos\frac{\pi}{12}$ 3p

$\cos\frac{\pi}{12}=\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{3}+1\right)}{4}$ 3p

$f\left(\cos\frac{5\pi}{12}\right)=\left|\sin\frac{5\pi}{12}\right|=\sin\frac{5\pi}{12}$ 1p

$\sin\frac{5\pi}{12}=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{5\pi}{12}\right)=\cos\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{3}+1\right)}{4}$ 2p

Demonstrează că $b=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}\in(1,2)$ 2p

Obține $[b]=1$ 1p

Subiectul 3. (*20 puncte*)

Fie H ortocentrul triunghiului ascuțitunghic ABC.

a) Demonstrați că $AH=2R\cos A$, unde R este raza cercului circumscris triunghiului ABC.

b) Să se arate că dacă triunghiurile ABH, BCH și CAH au perimetre egale atunci triunghiul ABC este echilateral.

c) Dacă a,b,c sunt lungimile laturilor BC, AC respectiv AB ale triunghiului ABC astfel încât $a=\frac{7c}{3}$ și $b=\frac{8c}{3}$, să se arate că $BC=AH\sqrt{3}$.

SOLUȚIE:

a) Fie D,E,F picioarele înălțimilor din A,B respectiv C.

În ΔAFC, dreptunghic în F, $\cos FAC=\frac{AF}{AC}$ 1p

În ΔAHF, dreptunghic în $F, \cos FAH = \dfrac{AF}{AH}$ 1p

În ΔBAD, dreptunghic în D, $\cos\left(BAD\right) = \cos FAH = \dfrac{AD}{AB} = \sin B$ 1p

Obține $AH = \dfrac{AC\cos A}{\cos FAH} = \dfrac{AC\cos A}{\sin B}$ 1p

Cum $\dfrac{AC}{\sin B} = 2R \Rightarrow AH = 2R\cos A$ 2p

b) $P_{AHB} = P_{BHC} \Rightarrow 2R\cos A + c = 2R\cos C + a$ 1p

$c = 2R\sin C, a = 2R\sin A \Rightarrow \left(\cos A - \cos C\right) - \left(\sin A - \sin C\right) = 0$ 2p

Obține $2\sin\dfrac{A-C}{2}\left(\sin\dfrac{A+C}{2} + \cos\dfrac{A+C}{2}\right) = 0$ 2p

Cum $0^\circ < \dfrac{A+C}{2} < 90^\circ \Rightarrow \sin\dfrac{A+C}{2} + \cos\dfrac{A+C}{2} \neq 0 \Rightarrow \sin\dfrac{A-C}{2} = 0 \Rightarrow A = C$ 1p

Analog obține $A = B \Rightarrow A = B = C \Rightarrow$ triunghiul ABC este echilateral....................1p

c) $\cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \dfrac{\dfrac{64c^2}{9} + c^2 - \dfrac{49c^2}{9}}{2\dfrac{8c}{3}c} = \dfrac{1}{2}$ 2p

Cum A este unghi ascuțit, rezultă $A = 60^\circ$ 1p

$\dfrac{a}{\sin A} = 2R \Rightarrow 2R = \dfrac{2a}{\sqrt{3}}$ 2p

$AH = 2R\cos A = \dfrac{2a}{\sqrt{3}} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{a}{\sqrt{3}} \Rightarrow BC = AH\sqrt{3}$ 2p

Subiectul 4. (*30 puncte*)

Dintr-o localitate A pleacă un biciclist care în prima oră de mers parcurge $10km$ și în fiecare oră următoare cu $1km$ mai mult decât în ora precedentă. Simultan, dintr-o localitate B care se găsește la o distanță de $7,5km$ față de A, pleacă în același sens un al doilea biciclist care în prima oră de mers parcurge $12km$ și în fiecare oră următoare cu $1,5km$ mai mult decât în ora precedentă.

a) După câte ore biciclistul care pleacă din localitatea B parcurge $94,5km$?
b) Știind că biciclistul care pleacă din localitatea B îl ajunge pe cel care pleacă din localitatea A după n ore ($n \in \mathbb{N}^*$), aflați valoarea lui n.
c) Dacă bicicliștii ar porni simultan unul spre altul, arătați că ei s-ar întâlni în cel mult 21 minute (admitem că cei doi bicicliști merg cu viteză constantă).

SOLUȚIE:

a) După n ore biciclistul din B parcurge distanța $d_B = 12n + \dfrac{n\left(n-1\right)}{2} \cdot 1,5; d_B = 94,5$ 4p

Obține ecuația $n^2 + 15n - 126 = 0$ 3p

Determină $n = 6$, care convine....................3p

b) Observă că singura posibilitate de a se întâlni este atunci când biciclistul din B merge spre localitatea A.....2p

După n ore biciclistul din A parcurge distanța $d_A = 10n + \dfrac{n\left(n-1\right)}{2}$ 2p

$d_B = d_A + 7,5$ 3p
Obține ecuația $n^2 + 7n - 30 = 0 \Rightarrow n = 3$, care convine...3p
c) Cum $AB < 10$, observă că bicicliștii se vor întâlni în prima oră de mers..2p
Vitezele celor doi bicicliști sunt $v_A = 10km/h, v_B = 12km/h$ 2p
În același timp t bicicliștii parcurg distanțele $s_A = 10t, s_B = 12t$ 2p
$s_A + s_B = 7,5 \Rightarrow t = \frac{15}{44}$ ore...2p
$t = \frac{15}{44} \cdot 60 \min \Rightarrow t = 20\frac{5}{11} < 21 \min$……………………………………………..……..…………………2p

Notă:
*Toate subiectele sunt obligatorii; se acordă **10 puncte din oficiu**.*
Orice rezolvare corectă a oricărei probleme, dar diferită de cea din barem se notează cu punctaj echivalent.
Punctajul maxim este de 100 de puncte.

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ „ADOLF HAIMOVICI”
Ediția a XXVIII-a
ETAPA NAȚIONALĂ – 16 mai 2026
Clasa a X–a – Secțiunea H1 – Filieră tehnologică

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

Subiectul 1. (*20 puncte*)

a) Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația:

$$\log_x[2(x-1)^3+(x-1)^2-3x+4]=3$$

b) Fie N un număr real strict pozitiv, diferit de 1, astfel încât $\lg N = a$, $\log_6 N = b$ și $\log_{15} N = c$, arătați că $\frac{1}{\log_2 N}+\frac{1}{\log_3 N}+\frac{1}{\log_5 N}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$

SOLUȚIE:

a) Impune condițiile de existență: $x>0, x\neq 1, [2(x-1)^3+(x-1)^2-3x+4]>0$ 2p

Aduce ecuația la forma $2(x-1)^3+(x-1)^2-3x+4=x^3$ 1p

Obține $2(x-1)^3+(x-1)^2-3(x-1)-(x-1)(x^2+x+1)=0$ 2p

$(x-1)(x^2-4x-3)=0$ 2p

$x-1=0 \Rightarrow x=1$ nu convine .... 1 p

$x^2-3x-4=0 \Rightarrow x_{1,2}=2\pm\sqrt{7}$, dar $2-\sqrt{7}$ nu convine 1p

În consecință, se obține x = $2+\sqrt{7}$ care convine.......................... 1p

b) Dacă $\lg N = a \Rightarrow \frac{1}{a}=\log_N 10=\log_N 2+\log_N 5$ .... 2 p

$\log_6 N = b \Rightarrow \frac{1}{b}=\log_N 6=\log_N 2+\log_N 3$ 2p

$\log_{15} N = c \Rightarrow \frac{1}{c}=\log_N 15=\log_N 3+\log_N 5$ 2p

Adună relațiile $\Rightarrow 2(\log_N 2+\log_N 3+\log_N 5)=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$ 2p

$\Rightarrow \frac{1}{\log_2 N}+\frac{1}{\log_3 N}+\frac{1}{\log_5 N}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$ 2p

Subiectul 2. (*20 puncte*)

a) La un concurs de matematică se propune un subiect format din 5 exerciții, dintre care cel puțin unul trebuie să fie de algebră și cel puțin două trebuie să fie de geometrie. Știind că în total avem la dispoziție 7 exerciții de algebră și 6 exerciții de geometrie să se calculeze câte variante de subiecte se pot propune pentru concurs.

b) Demonstrați că $\sqrt{C_n^{k-1}\cdot C_n^k}+\sqrt{C_n^k\cdot C_n^{k+1}}<C_{n+1}^{k+1}$, $\forall k,n\in\mathbb{N}, n>2k$.

SOLUȚIE:

a) Variantele de subiect pot avea:

1) 3 exerciții de algebră și 2 de geometrie $\Rightarrow C_7^3\cdot C_6^2$ - variante de subiecte 2p

2) 2 exerciții de algebră și 3 de geometrie $\Rightarrow C_7^2 \cdot C_6^3$ - variante de subiecte..2p

3) 1 subiect de algebră și 4 de geometrie $\Rightarrow C_7^1 \cdot C_6^4$ - variante de subiecte 2p

Numărul total de moduri de alcătuire a unui subiect este $C_7^3 \cdot C_6^2 + C_7^2 \cdot C_6^3 + C_7^1 \cdot C_6^4 = 1050$ 2p

b) Folosind inegalitatea mediilor vom obține:

$\sqrt{C_n^{k-1} \cdot C_n^k} \le \frac{1}{2}(C_n^{k-1} + C_n^k) = \frac{(n+1)!}{2 \cdot k! \cdot (n-k+1)!}$ 3p

$\sqrt{C_n^k \cdot C_n^{k+1}} \le \frac{1}{2}(C_n^k + C_n^{k+1}) = \frac{(n+1)!}{2 \cdot (k+1)! \cdot (n-k)!}$ 3p

Atunci $\sqrt{C_n^{k-1} \cdot C_n^k} + \sqrt{C_n^k \cdot C_n^{k+1}} \le \frac{(n+2)!}{2 \cdot (k+1)! \cdot (n-k+1)!}$ 3p

Se arată că $\frac{(n+2)!}{2 \cdot (k+1)! \cdot (n-k+1)!} < C_{n+1}^{k+1} \Leftrightarrow \frac{n+2}{2(n-k+1)} < 1 \Leftrightarrow n > 2k$ Adevărat $\forall k, n \in \mathbb{N}$..........................3p

Subiectul 3. (*20 puncte*).

Se consideră dezvoltarea $\left(\sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt[4]{x}}\right)^n$, unde $x \in \mathbb{R}, x > 0$ și $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Să se determine n astfel încât coeficienții termenilor de rang unu, doi și trei sunt în progresie aritmetică;

b) Pentru n aflat anterior, calculați probabilitatea ca alegând un termen al dezvoltării, acesta să aibă exponentul lui x un număr natural.

SOLUȚIE:

a) Pentru T_1 coeficientul este $C_n^0 = 1$, ... 1p

pentru T_2 coeficientul este $\frac{1}{2} C_n^1 = \frac{n}{2}$, ...1p

pentru T_3 coeficientul este $\frac{1}{4} C_n^2 = \frac{n(n-1)}{8}$ 1p

$1, \frac{n}{2}, \frac{n(n-1)}{8}$ sunt în progresie aritmetică $\Longrightarrow \frac{n}{2} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{n(n-1)}{8}\right)$ 2p

obține soluțiile $n_1 = 1, n_2 = 8$ 2p

dezvoltarea are cel puțin 3 termeni $\Longrightarrow n = 8$. 1p

b) P $= \frac{\text{nr.cazurilor favorabile}}{\text{nr.cazurilor posibile}}$ 1p

n=8 $\Longrightarrow$ nr. cazurilor posibile = nr. termenilor din dezvoltare = 9 .... 1p

$T_{k+1} = C_n^k \left(\sqrt{x}\right)^{n-k} \left(\frac{1}{2\sqrt[4]{x}}\right)^k = C_n^k 2^{-k} x^{\frac{16-3k}{4}}$ 4p

$\frac{16-3k}{4} \in \mathbb{N} \Longrightarrow 4|(16-3k)$ $și$ $0 \le k < \frac{16}{3}$ 3p

$\Longrightarrow$k$\in \{0, 4\}$ 1p

$\Longrightarrow$nr. cazurilor favorabile =2 .... 1p

În consecință, se obține $P = \frac{2}{9}$. 1p

Subiectul 4. (*30 puncte*)

Harta terenului unui parc de distracții este reprezentată într-un sistem de coordonate xOy astfel încât fiecare unitate de pe axă să reprezinte 10 metri. Punctele marcate cu $A(2,2)$ reprezintă punctul în care se află scena principală, unde va avea loc spectacolul de deschidere; $B(4,-2)$ este punctul în care este montată o roată cu frâne iar $C(3,1)$ marchează poarta de la intrarea principală în parc.

a) Ce coordonate are punctul obținut de un panou care reflectă imaginea scenei principale într-un punct simetric față de dreapta care unește intrarea principală de roată?
b) Pentru a crea un joc de lumină se plasează două reflectoare în punctele B' și C' care sunt simetricele punctului A față de punctele B și C. Pentru a delimita corect zona de iluminare se cere calcularea ariei suprafeței $AB'C'$.
c) Pentru siguranță se montează un sistem de supraveghere într-un punct M aflat în interiorul suprafeței ABC astfel încât suprafețele ACM și BCM să aibă arii egale. Determinați toate pozițiile posibile ale punctului de supraveghere.

SOLUȚIE:

a) Dacă $A'(a,b)$ este simetricul punctului A față de dreapta $BC \Rightarrow AA' \perp BC \Rightarrow m_{AA'} \cdot m_{BC} = -1$ 2p

Deoarece $m_{AA'} = \dfrac{b-2}{a-2}$ și $m_{BC} = -3$ vom obține $a - 3b = -4$ 2p

Se știe că $AA' \cap BC = \{D\}$, unde $D(x_D, y_D)$ este mijlocul segmentului AA' 2p

Deoarece $D \in BC$ și ecuația dreptei BC este $3x + y - 10 = 0 \Rightarrow 3a + b = 12$ 2p

Rezolvând sistemul format de cele două ecuații obținem $a = \dfrac{16}{5}, b = \dfrac{12}{5} \Rightarrow A'(\dfrac{16}{5}, \dfrac{12}{5})$ 2p

b) Dacă B' este simetricul lui A față de $B \Rightarrow B'(6,-6)$ 2p
Dacă C' este simetricul lui A față de $C \Rightarrow C'(4,0)$ 2p
Deoarece $BC // B'C'$ și $AA' \perp BC \Rightarrow AA' \perp B'C'$ unde $A' \in B'C'$ 2p
Folosind formula distanței între două puncte obținem
$AA' = \frac{2\sqrt{10}}{5}u, B'C' = 2\sqrt{10}u \Rightarrow A_{\Delta AB'C'} = \frac{AA' \cdot B'C'}{2} = 4u^2 \Rightarrow A_{\Delta AB'C'} = 400m^2$..........4p

c) Dacă $M(m,n)$, cu $m,n \in \mathbb{R}$ atunci
$A_{\Delta ACM} = A_{\Delta BCM} \Rightarrow \frac{AC \cdot d(M,AC)}{2} = \frac{BC \cdot d(M,BC)}{2} \Rightarrow AC \cdot d(M,AC) = BC \cdot d(M,BC)$.......... 1p
Lungimile segmentelor $AC = \sqrt{2}$ și $BC = \sqrt{10}$, iar ecuațiile dreptelor AC și BC sunt
$(AC): x + y - 4 = 0$ și $(BC): 3x + y - 10 = 0$..........2p
Folosind formula distanței de la un punct la o dreaptă, egalitatea de arii revine la ecuația:
$\sqrt{2} \cdot \frac{|m+n-4|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \sqrt{10} \cdot \frac{|3m+n-10|}{\sqrt{3^2+1^2}} \Rightarrow |m+n-4| = |3m+n-10|$..........2p
Cum M este în interiorul triunghiului ΔABC, atunci M este în același semiplan cu punctul B determinat de dreapta AC și în același semiplan cu punctul A determinat de dreapta BC, ceea ce implică:
$m + n - 4 < 0$ și $3m + n - 10 < 0$ 1p
Egalitatea de module devine astfel $-(m+n-4) = -(3m+n-10)$, adică:
$m + n - 4 = 3m + n - 10 \Rightarrow 10 - 4 = 2m \Rightarrow m = 3$ 2p
Deci, punctele $M(m,n)$ din plan cu proprietatea că $A_{\Delta ACM} = A_{\Delta BCM}$ sunt de forma $(3,n)$, cu $n \in \mathbb{R}$, adică pe dreapta $x = 3$..........1p
Cum M este în interiorul triunghiului ΔABC, atunci $n \in (0,1)$, deoarece intersecția dintre dreapta $x = 3$ și triunghiul ΔABC este mijlocul segmentului AB, de coordonate $(3,0)$, și punctul $C(3,1)$..........1p

Notă:
*Toate subiectele sunt obligatorii; se acordă **10 puncte din oficiu**.*
Orice rezolvare corectă a oricărei probleme, dar diferită de cea din barem se notează cu punctaj echivalent.
Punctajul maxim este de 100 de puncte.

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
„ADOLF HAIMOVICI”
ETAPA NAȚIONALĂ – 16 mai 2026
Clasa a XI–a – Secțiunea H1 – Filieră tehnologică

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

Subiectul 1. (*20 puncte*)

În mulțimea $M_2(\mathbb{C})$, se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 27\end{pmatrix}$ și $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

a) Să se rezolve ecuația $\det(A-xI_2)=0, x\in\mathbb{R}$.

b) Să se demonstreze că dacă matricea $X\in M_2(\mathbb{C})$ verifică relația $AX=XA$, atunci există $a,b\in\mathbb{C}$ astfel încât $X=\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & b\end{pmatrix}$.

c) Să se determine numărul de soluții ale ecuației $X^3=A, X\in M_2(\mathbb{C})$

SOLUȚIE:

a) $A-xI_2=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 27\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}x & 0\\ 0 & x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1-x & 0\\ 0 & 27-x\end{pmatrix}$ 2p

$\det(A-xI_2)=0\Leftrightarrow\begin{vmatrix}-1-x & 0\\ 0 & 27-x\end{vmatrix}=0\Leftrightarrow(-1-x)(27-x)=0$ 2p

$-1-x=0$ sau $27-x=0\Leftrightarrow x=-1$ sau $x=27$ 2p

b) Fie $X=\begin{pmatrix}x & y\\ z & t\end{pmatrix}\in M_2(\mathbb{C})$

$AX=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 27\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x & y\\ z & t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-x & -y\\ 27z & 27t\end{pmatrix}$ 2p

$XA=\begin{pmatrix}x & y\\ z & t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 27\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-x & 27y\\ -z & 27t\end{pmatrix}$ 2p

$AX=XA\Leftrightarrow\begin{cases}-y=27y\\ 27z=-z\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=0\\ z=0\end{cases}\Rightarrow X=\begin{pmatrix}x & 0\\ 0 & t\end{pmatrix}$. Notăm x cu a și t cu $b\Rightarrow X=\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & b\end{pmatrix}$. 2p

c) $X^3=A\Rightarrow X^4=AX$ și $X^4=XA\Rightarrow AX=XA$ 2p

Folosind punctul b) obținem că $\Rightarrow X=\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & b\end{pmatrix}\Rightarrow X^3=\begin{pmatrix}a^3 & 0\\ 0 & b^3\end{pmatrix}$ 1p

$X^3=A\Rightarrow\begin{pmatrix}a^3 & 0\\ 0 & b^3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 27\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}a^3=-1\\ b^3=27\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(a+1)(a^2-a+1)=0\\ (b-3)(b^2+3b+9)=0\end{cases}$ 2p

$a\in\{-1,\frac{1+i\sqrt{3}}{2},\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\}$ și $b\in\{3,\frac{-3+3\sqrt{3}i}{2},\frac{-3-3\sqrt{3}i}{2}\}$ 2p

În total sunt 9 matrice cu proprietatea cerută. 1p

Subiectul 2. (*20 puncte*)

Fie sistemul de ecuații liniare $\begin{cases}x+y+z=3\\ ax+y-z=1\\ 2x+y-2z=0\end{cases}$, unde a este un număr real.

a) Rezolvați sistemul pentru $a \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{5}{3}\right\}$.

b) Pentru $a = \frac{5}{3}$, determinați soluțiile (x_0, y_0, z_0) ale sistemului de ecuații liniare pentru care

$x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = 45$.

SOLUȚIE:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \Delta = det(A) = -2 + a - 2 - 2 + 1 + 2a = 3a - 5.$ 2p

$\Delta \neq 0, (\forall)\ a \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{5}{3}\right\}$, iar numărul ecuațiilor = 3= numărul necunoscutelor ⇒sistemul este compatibil determinat. 3p

$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -6 + 1 + 0 - 0 + 3 + 2 = 0,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ a & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -2 + 0 - 6 - 2 - 0 + 6a =$
$2(3a - 5),\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ a & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 3a + 2 - 6 - 1 - 0 = 3a - 5$ 3p

$\begin{cases} x = \frac{\Delta_1}{\Delta} \\ y = \frac{\Delta_2}{\Delta} \\ z = \frac{\Delta_3}{\Delta} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \\ z = 1 \end{cases}$ 2p

b) Dacă $a = \frac{5}{3}$, atunci $\Delta = det(A) = 0$. Aplicăm metoda lui Gauss pentru rezolvarea sistemului de ecuații liniare $\begin{cases} x + y + z = 3 \\ \frac{5}{3} \cdot x + y - z = 1 \\ 2x + y - 2z = 0 \end{cases}$ 2p

$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ 5x + 3y - 3z = 3 \\ 2x + y - 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 3 \\ y + 4z = 6 \\ 0 \cdot z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3\alpha - 3 \\ y = 6 - 4\alpha \\ z = \alpha,\ \alpha \in \mathbb{C} \end{cases}$ 3p

Considerăm soluția $(x_0, y_0, z_0) = (3\alpha - 3, 6 - 4\alpha,\ \alpha)$, care verifică egalitatea $x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = 45$.
$(3\alpha - 3)^2 + (6 - 4\alpha)^2 + \alpha^2 = 45 \Leftrightarrow 26\alpha^2 - 66\alpha = 0 \Leftrightarrow 2\alpha(13\alpha - 33) = 0 \Leftrightarrow$
$\alpha = 0$ sau $\alpha = \frac{33}{13}$. 3p

Dacă $\alpha = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_0 = -3 \\ y_0 = 6 \\ z_0 = 0 \end{cases}$. Dacă $\alpha = \frac{33}{13} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = \frac{60}{13} \\ y_0 = -\frac{54}{13} \\ z_0 = \frac{33}{13} \end{cases}$. 2p

Subiectul 3. (*20 puncte*)

Fie $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ și funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{x^2 - ax + 1}{x^2 + 1}$. Notăm cu $\operatorname{Im} f = \{y \in \mathbb{R} / \exists x \in \mathbb{R}, f(x) = y\}$ imaginea funcției f.

a) Determinați asimptotele funcției f.

b) Aflați valorile lui a, astfel încât $\operatorname{Im} f = [-2, 4]$.

c) Arătați că funcția f admite trei puncte de inflexiune.

SOLUȚIE:

a) $-\infty$ și $+\infty$ sunt puncte de acumulare ale domeniului de definiție al funcției f.

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2 - ax + 1}{x^2 + 1} = 1$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2 - ax + 1}{x^2 + 1} = 1$, rezultă că dreapta de ecuație $y = 1$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$ și spre $-\infty$ pentru funcția f. 2p

$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 1 > 0$, f este continuă pe $\mathbb{R}$, deci graficul funcției f nu are asimptote verticale.............2p

b) $f'(x) = \frac{(2x-a)\cdot(x^2+1)-(x^2-ax+1)\cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{a(x^2-1)}{(x^2+1)^2}$, $x \in \mathbb{R}$. 1p

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow a(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow x = -1$ sau $x = 1$. $f(-1) = \frac{a+2}{2}$, $f(1) = \frac{2-a}{2}$, ...1p

Cazul 1. $a \in (-\infty, 0)$

$f'(x) < 0$ dacă $x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty) \Rightarrow f$ este strict descrescătoare pe fiecare dintre intervalele $(-\infty, -1]$ și $[1, \infty)$.

$f'(x) > 0$ dacă $x \in (-1,1) \Rightarrow f$ este strict crescătoare pe $[-1,1]$. 2p

Din $a < 0$ și $y = 1$ asimptotă orizontală spre $\pm\infty$ pentru f rezultă că $x = -1$ este punct de minim global și $x = 1$ este punct de maxim global pentru f.

f este continuă pe $\mathbb{R} \Rightarrow \operatorname{Im} f = \left[\frac{a+2}{2}, \frac{2-a}{2}\right] \Rightarrow \begin{cases} \frac{a+2}{2} = -2 \\ \frac{2-a}{2} = 4 \end{cases} \Rightarrow a = -6 \in (-\infty, 0)$. 2p

Cazul 2. $a \in (0, \infty)$

$f'(x) > 0$ dacă $x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty) \Rightarrow f$ este strict crescătoare pe fiecare dintre intervalele $(-\infty, -1]$ și $[1, \infty)$.

$f'(x) < 0$ dacă $x \in (-1,1) \Rightarrow f$ este strict descrescătoare pe $[-1,1]$. 2p

Din $a > 0$ și $y = 1$ asimptotă orizontală spre $\pm\infty$ pentru f rezultă $x = -1$ este punct de maxim global și $x = 1$ este punct de minim global pentru f.

f este continuă pe $\mathbb{R} \Rightarrow \operatorname{Im} f = \left[\frac{2-a}{2}, \frac{a+2}{2}\right] \Rightarrow \begin{cases} \frac{2-a}{2} = -2 \\ \frac{a+2}{2} = 4 \end{cases} \Rightarrow a = 6 \in (0, \infty)$. 2p

c) f este de două ori derivabilă pe $\mathbb{R}$. $f''(x) = \frac{2ax(-x^2+3)}{(x^2+1)^3}$, $x \in \mathbb{R}$ 1p

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 2ax(-x^2 + 3) = 0 \Leftrightarrow x \in \{-\sqrt{3}, 0, \sqrt{3}\}$. 1p

Studiem semnul expresiei $\dfrac{2x(3-x^2)}{(x^2+1)^3}$ 2p

Cazul 1. $a \in (-\infty, 0)$

$f''(x) < 0$ dacă $x \in (-\infty, -\sqrt{3}) \cup (0, \sqrt{3}) \Rightarrow f$ este concavă pe fiecare din intervalele $(-\infty, -\sqrt{3})$ și $(0, \sqrt{3})$.

$f''(x) > 0$ dacă $x \in (-\sqrt{3}, 0) \cup (\sqrt{3}, \infty) \Rightarrow f$ este convexă pe fiecare din intervalele $(-\sqrt{3}, 0)$ și $(\sqrt{3}, \infty)$. Mulțimea punctelor de inflexiune este $\{-\sqrt{3}, 0, \sqrt{3}\}$. 1p

Cazul 2. $a \in (0, \infty)$

$f''(x) > 0$ dacă $x \in (-\infty, -\sqrt{3}) \cup (0, \sqrt{3}) \Rightarrow f$ este convexă pe fiecare din intervalele $(-\infty, -\sqrt{3})$ și $(0, \sqrt{3})$.

$f''(x) < 0$ dacă $x \in (-\sqrt{3}, 0) \cup (\sqrt{3}, \infty) \Rightarrow f$ este concavă pe fiecare din intervalele $(-\sqrt{3}, 0)$ și $(\sqrt{3}, \infty)$. Mulțimea punctelor de inflexiune este $\{-\sqrt{3}, 0, \sqrt{3}\}$. 1p

Subiectul 4. (*30 puncte*)

O platformă petrolieră este situată într-un punct P, aflat la o distanță $d=3$ km de cel mai apropiat punct A aflat pe un țărm rectiliniu. Platforma trebuie conectată la o rafinărie situată în punctul B de pe țărm, la o distanță $L=10$ km de punctul A.
Costul instalării conductei sub apă este de 5 milioane euro/km, în timp ce pe uscat (de-a lungul țărmului) costul este de 3 milioane euro/km.
Determinați un punct C situat între A și B, unde conducta ar trebui să atingă țărmul, astfel încât prețul total al proiectului să fie minim. Precizați prețul minim al proiectului și lungimea conductei în acest caz.

SOLUȚIE:
Fie x distanța de la A la C, $0 \le x \le 10$.

$d=$distanță minimă $\Rightarrow PA \perp AB, PA=3\text{km} \Rightarrow \Delta APC$ este dreptunghic în $A \Rightarrow PC=\sqrt{x^2+9}, CB=10-x$ 5p

Funcția ce modelează costul proiectului este $f:[0,10]\to\mathbb{R}, f(x)=5\sqrt{x^2+9}+3(10-x)$ 5p

Calcularea derivatei și determinarea punctului de extrem: $f'(x)=5\cdot\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+9}}-3$ 3p

$f'(x)=0 \Leftrightarrow 5x-3\sqrt{x^2+9}=0 \Leftrightarrow 5x=3\sqrt{x^2+9} \Leftrightarrow 25x^2=9(x^2+9) \Rightarrow x=\pm\dfrac{9}{4}, x\ge 0 \Rightarrow x=\dfrac{9}{4}$ 5p

$f(\dfrac{9}{4})=42$ 2p

$f(0)=45; f(10)=5\sqrt{109};$ f este funcție continuă pe $[0,10]$ 1p

Pentru orice $x\in[0,\dfrac{9}{4}], f'(x)\le 0$, f deci este descrescătoare pe $[0,\dfrac{9}{4}]$ 2p

Pentru orice $x\in[\dfrac{9}{4},10], f'(x)\ge 0$, f deci este crescătoare pe $x\in[\dfrac{9}{4},10]$ 2p

Deci $x=\dfrac{9}{4}$ este punct de minim pentru f pe intervalul $[0,10]$ 2p

Concluzie: Punctul C se găsește la distanța $2,25$ km de punctul A, pe dreapta AB, iar distanța optimă este de $11,5$ km $(PC+CB)$ oferindu-ne prețul minim al proiectului de 42 milioane euro. 3p

Notă:
Toate subiectele sunt obligatorii; se acordă ***10 puncte din oficiu****.*
Orice rezolvare corectă a oricărei probleme, dar diferită de cea din barem se notează cu punctaj echivalent.
Punctajul maxim este de 100 de puncte.

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
„ADOLF HAIMOVICI"
Ediția a XXVIII-a
ETAPA NAȚIONALĂ – 16 mai 2026
Clasa a XII–a – Secțiunea H1 – Filieră tehnologică

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

Subiectul 1. (*20 puncte*)
Se consideră x_1, x_2, x_3 și x_4 rădăcinile polinomului $f = X^4 + aX^3 + 5X^2 - 4X + 2$, unde a este număr real.
Rezolvă:
a) Determinați restul împărțirii polinomului f la $X - i$, știind că împărțit la $X - 2$ dă restul 6;
b) Pentru $a = -2014$, să se calculeze $(1 + x_1)(1 + x_2)(1 + x_3)(1 + x_4)$;
c) Demonstrați că, pentru orice număr real a, polinomul f nu are toate rădăcinile numere reale.

SOLUȚIE:
a) Din teorema restului se obține $r = f(2) = 30 + 8a$ **2p**
$30 + 8a = 6 \Longrightarrow a = -3$ **2p**
Deci, $f = X^4 - 3X^3 + 5X^2 - 4X + 2$ **1p**
Restul împărțirii la $X - i$ este $r = f(i) = -2 - i$ **2p**
b) Pentru $a = -2014$, polinomul devine $f = X^4 - 2014X^3 + 5X^2 - 4X + 2$ **1p**
Din $f = (X - x_1)(X - x_2)(X - x_3)(X - x_4)$ deducem că:
$f(-1) = (-1 - x_1)(-1 - x_2)(-1 - x_3)(-1 - x_4) = (1 + x_1)(1 + x_2)(1 + x_3)(1 + x_4)$ **2p**
Pe de altă parte $f(-1) = 2026$ **1p**
Deci, $(1 + x_1)(1 + x_2)(1 + x_3)(1 + x_4) = 2026$ **1p**
c) Presupunem că $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R} \Longrightarrow \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + \frac{1}{x_3^2} + \frac{1}{x_4^2} > 0$ **2p**
Din relațiile lui Viète
$x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 = 5$,
$x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 = 4$,
$x_1x_2x_3x_4 = 2$ **3p**
Obținem $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + \frac{1}{x_3^2} + \frac{1}{x_4^2} = \frac{(x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4)^2 - 2x_1x_2x_3x_4(x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4)}{(x_1x_2x_3x_4)^2} =$
$= \frac{4^2 - 2 \cdot 2 \cdot 5}{2^2} = -1 < 0$, pentru orice număr real a **2p**
Contradicție, deci f nu are toate rădăcinile numere reale **1p**

Subiectul 2. (*20 puncte*)
Se consideră funcțiile $f, g : (1, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{4}{(x-1)^2}$ și $g(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - 1$.
Rezolvă:
a) Determinați primitiva H a funcției $h : (1, +\infty) \to \mathbb{R}$, $h(x) = g\left(\frac{1}{x}\right) + 1$ pentru care $H(1) = 0$;
b) Să se arate că $g(x) \leq f(x), \forall x > 1$;
c) Să se calculeze aria suprafeței plane $A(t)$ limitată de graficele celor două funcții și dreptele de ecuații $x = t$, $x = 3$, unde $t > 1$ și $t \neq 3$.

SOLUȚIE:
a) $h(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ **1p**

$H(x) = \int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\, dx = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) + C$ **1p**

$H(1) = \ln(1+\sqrt{2}) + C = 0 \Longrightarrow C = -\ln(1+\sqrt{2})$ **1p**

$H(x) = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) - \ln(1+\sqrt{2})$ sau $H(x) = \ln\left(\frac{x+\sqrt{1+x^2}}{1+\sqrt{2}}\right)$ **1p**

b) Pentru $x > 1$ avem $\sqrt{x^2+1} > x \Rightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} < 1$, deci $g(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - 1 < 0$ (1) **3p**

$f(x) = \frac{4}{(x-1)^2} > 0, \forall x \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$ (2) **1p**

Din relațiile (1) și (2) avem $g(x) < 0 < f(x), \forall x > 1 \Rightarrow g(x) \leq f(x), \forall x > 1$........................... **2p**

c) Deoarece $f(x) \geq g(x)$ rezultă $|f(x) - g(x)| = f(x) - g(x)$, aria suprafeței plane solicitate este

$A(t) = \int_t^3 |f(x) - g(x)|\, dx = \int_t^3 (f(x) - g(x))\, dx$ **1p**

Dacă $t \in (1,3)$, atunci $A(t) = \int_t^3 \left(\frac{4}{(x-1)^2} - \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} + 1\right) dx$ **1p**

$A(t) = \left(-\frac{4}{x-1} - \sqrt{x^2+1} + x\right)\Big|_t^3 =$...**3p**

$= 1 - \sqrt{10} - \left(-\frac{4}{t-1} - \sqrt{t^2+1} + t\right) = \frac{4}{t-1} + \sqrt{t^2+1} - t + 1 - \sqrt{10}$ **2p**

În cazul $t > 3$, avem $A(t) = \int_3^t \left(\frac{4}{(x-1)^2} - \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} + 1\right) dx$ **1p**

$A(t) = \left(-\frac{4}{x-1} - \sqrt{x^2+1} + x\right)\Big|_3^t =$...**1p**

$= \left(-\frac{4}{t-1} - \sqrt{t^2+1} + t\right) - (1 - \sqrt{10}) = -\frac{4}{t-1} - \sqrt{t^2+1} + t - 1 + \sqrt{10}$ **1p**

Subiectul 3. (*20 puncte*)

Se consideră şirul $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definit prin $I_0(x) = 1$ şi $I_{n+1}(x) = \int_0^x I_n(t)dt$, $(\forall)x \in \mathbb{R}$.

Rezolvă:

a) Calculaţi $I_2(x)$;
b) Demonstraţi că $I_n(x) = \frac{x^n}{n!}$, $(\forall)x \in \mathbb{R}$;
c) Demonstraţi că $I_0(1) + I_1(1) + I_2(1) + \ldots + I_n(1) < 3, (\forall)n \in \mathbb{N}$

SOLUȚIE:

a) $I_1(x) = \int_0^x I_0(t)dt = \int_0^x 1dt = t\,|_0^x = x$ **2p**

$I_2(x) = \int_0^x I_1(t)\, dt = \int_0^x t\, dt = \frac{t^2}{2}\Big|_0^x = \frac{x^2}{2}$ **3p**

b) Demonstrăm relaţia prin inducţie.

Fie P(n): $I_n(x) = \frac{x^n}{n!}$, $(\forall)x \in \mathbb{R}$ **1p**

Avem că P(0): $I_0(x) = \frac{x^0}{0!} = 1$, $(\forall)x \in \mathbb{R}$ adevărată (etapa de verificare (1)).................................**2p**

Presupunem P(k) adevărată şi demonstrăm P(k+1) (etapa inductivă(2))

P(k+1) va fi $I_{k+1}(x) = \frac{x^{k+1}}{(k+1)!}$, $(\forall)x \in \mathbb{R}$ **1p**

$I_{k+1}(x) = \int_0^x I_k(t)\, dt = \int_0^x \frac{t^k}{k!} dt = \frac{1}{k!} \cdot \frac{t^{k+1}}{k+1}\Big|_0^x = \frac{t^{k+1}}{(k+1)!}\Big|_0^x = \frac{x^{k+1}}{(k+1)!}$, $(\forall)x \in \mathbb{R}$, c.c.t.d.........................**2p**

În consecinţă, din (1),(2) vom avea P(n) adevărată $(\forall)n \in \mathbb{N}$, adică $I_n(x) = \frac{x^n}{n!}$ $(\forall)x \in \mathbb{R}$ **1p**

c) Pentru $n = 0$ avem $I_0(1) = 1 < 3$, iar pentru $n = 1$: $I_0(1) + I_1(1) = 1 + 1 < 3$ **1p**
Pentru $n \geq 2$ vom avea:
$I_0(1) + I_1(1) + I_2(1) + \cdots + I_n(1) = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} <$ **1p**
$< 2 + \frac{1}{1\cdot2} + \frac{1}{2\cdot3} + \cdots + \frac{1}{(n-1)\cdot n} = 2 + \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) =$ **3p**
$= 2 + \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} = 2 + 1 - \frac{1}{n} = 3 - \frac{1}{n} < 3\,, (\forall) n \geq 2$ **2p**

Deci avem că $I_0(1) + I_1(1) + I_2(1) + \ldots + I_n(1) < 3, (\forall) n \in \mathbb{N}$ **1p**

Subiectul 4. (*30 puncte*)
O firmă produce cutii paralelipipedice, iar volumul unei cutii depinde de un parametru $x > 0$ şi este modelat printr-un polinom de gradul 3:
$$V(x) = x^3 + ax^2 + bx + c\,, a, b, c \in \mathbb{R}$$
Se cunosc următoarele informaţii din procesul tehnologic:
1. V este divizibil prin polinomul $(x^2 - 3x + 2)$;
2. Suma rădăcinilor polinomului este egală cu produsul lor;
3. Costul producerii unei cutii este dat de $C(x) = 30x + 20$ şi acest cost trebuie menţinut în intervalul (110, 140].

Folosind toate condiţiile din procesul tehnologic descris mai sus, rezolvă următoarele cerinţe :
a) Determină parametri reali a, b, c ;
b) Determină valorile reale ale lui x pentru care $V(x) > 0$;
c) Determină volumul maxim al cutiilor produse.

SOLUȚIE:
a) Notăm rădăcinile polinomului cu x_1, x_2, x_3.
$V \vdots (x^2 - 3x + 2) \Leftrightarrow V \vdots (x-1)(x-2) \Rightarrow V(1) = V(2) = 0 \Rightarrow x_1 = 1\,, x_2 = 2$ **5p**
Dacă $x_1 + x_2 + x_3 = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \Leftrightarrow 1 + 2 + x_3 = 1 \cdot 2 \cdot x_3 \Leftrightarrow x_3 = 3$ **2p**
Vom avea deci:
$V(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) = (x-1)(x-2)(x-3) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ **2p**
În consecinţă: $a = -6, b = 11, c = -6$ **1p**

b) Conform informaţiilor din procesul tehnologic avem:
$110 < 30x + 20 \leq 140 \Leftrightarrow 3 < x \leq 4 \Leftrightarrow x \in (3,4]$ **3p**
$V(x) > 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-2)(x-3) > 0 \Rightarrow$ (cf. tabelului de semn) $x \in (1,2) \cup (3, +\infty)$..........................**5p**
Deci $x \in (3,4]$..........................**2p**

c) In condiţiile impuse de situaţia reală descrisă avem de determinat valoarea maximă a funcţiei
$V: (3,4] \to \mathbb{R},\ V(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$..........................**1p**
Avem $V'(x) = 3x^2 - 12x + 11$ iar punctele critice sunt $x = 2 \pm \frac{\sqrt{3}}{3} \notin (3,4]$ **4p**
Pentru $x \in (3,4]$ funcţia este crescătoare, deci valoarea maximă se atinge pentru $x = 4$ **3p**
Volumul maxim al cutiilor va fi $V(4) = (4-1)(4-2)(4-3) = 6$ **2p**

Notă:
Toate subiectele sunt obligatorii; se acordă ***10 puncte din oficiu****.*
Orice rezolvare corectă a oricărei probleme, dar diferită de cea din barem se notează cu punctaj echivalent.
Punctajul maxim este de 100 de puncte.

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
„ADOLF HAIMOVICI”
Ediția a XXVIII-a
ETAPA NAȚIONALĂ – 16 mai 2026

Clasa a IX–a – Secțiunea H2 – Profil real, specializarea științe ale naturii

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

Subiectul 1. (*20 puncte*)

Fie $A=\left\{x\in(0,\infty)\,\middle|\,\{x\}+\left\{\frac{1}{x}\right\}=1\right\}$, unde $\{x\}$ reprezintă partea fracționară a numărului real x.

a) Verificați că $1\notin A$ și $\frac{3+\sqrt{5}}{2}\in A$.

b) Arătați că $x^n+\frac{1}{x^n}\in\mathbb{N}$, $\forall x\in A$ și $\forall n\in\mathbb{N}^*$.

c) Demonstrați că A este o mulțime nevidă, care conține numai numere iraționale.

d) Dacă $x\in A$, calculați $\left\{x^{2026}\right\}+\left\{\frac{1}{x^{2026}}\right\}$.

SOLUȚIE:

a) $x=1\Rightarrow\{1\}+\left\{\frac{1}{1}\right\}=0+0=0\neq 1\Rightarrow 1\notin A$ **2p**

$x=\frac{3+\sqrt{5}}{2}\Rightarrow\{x\}=\frac{3+\sqrt{5}}{2}-\left[\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right]=\frac{3+\sqrt{5}}{2}-2=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ **1p**

$\left\{\frac{1}{x}\right\}=\left\{\frac{2}{3+\sqrt{5}}\right\}=\left\{\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right\}=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ **1p**

$\{x\}+\left\{\frac{1}{x}\right\}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}+\frac{3-\sqrt{5}}{2}=1\Rightarrow x\in A$ **1p**

b) Demonstrăm prin inducție propoziția $P(n): x^n+\frac{1}{x^n}\in\mathbb{N},\forall n\in\mathbb{N}^*$.

$x\in A\Rightarrow\{x\}+\left\{\frac{1}{x}\right\}=1\Rightarrow x-[x]+\frac{1}{x}-\left[\frac{1}{x}\right]=1\Rightarrow x+\frac{1}{x}=1+[x]+\left[\frac{1}{x}\right]\in\mathbb{N}$, deci P(1) este adevărată **3p**

Presupunem că $P(1),\ P(2),...,P(k)$ sunt adevărate

$\left(x^k+\frac{1}{x^k}\right)\left(x+\frac{1}{x}\right)\in\mathbb{N}\Rightarrow x^{k+1}+\frac{1}{x^{k+1}}+x^{k-1}+\frac{1}{x^{k-1}}\in\mathbb{N}$

Cum $x^{k-1}+\frac{1}{x^{k-1}}\in\mathbb{N}$ și $x>0\Rightarrow x^{k+1}+\frac{1}{x^{k+1}}\in\mathbb{N}$, astfel P(k+1) este adevărată **2p**

c) $\frac{3+\sqrt{5}}{2}\in A\Rightarrow A\neq\varnothing$ **1p**

Prin absurd, fie $x\in A$ și $x\in\mathbb{Q}$, atunci $x+\frac{1}{x}\in\mathbb{N}$ **1p**

$x+\dfrac{1}{x}=a$, $a\in\mathbb{N}\Rightarrow x^2-ax+1=0$ și cum $x\in\mathbb{Q}\Rightarrow\Delta=a^2-4$ este pătrat perfect **1p**

$a^2-4=b^2$, $b\in\mathbb{N}$, $(a-b)(a+b)=4\Rightarrow a-b=1,\ a+b=4$ imposibil,
sau, $a-b=2,\ a+b=2\ \Rightarrow\ a=2,\ b=0\ \Rightarrow x=1$ imposibil deoarece $1\notin A$,
sau $a-b=4,\ a+b=1$ imposibil.

Deci A conține numai numere iraționale **2p**

d) Fie $x\in A$ și $n\in\mathbb{N}^*$, $\{x^n\}+\left\{\dfrac{1}{x^n}\right\}=x^n+\dfrac{1}{x^n}-[x^n]-\left[\dfrac{1}{x^n}\right]\in\mathbb{N}$, conform punctului b) **1p**

Dar $\{x^n\}+\left\{\dfrac{1}{x^n}\right\}>0$, deoarece $\{x^n\}+\left\{\dfrac{1}{x^n}\right\}=0\Rightarrow$ $\{x^n\}=0$, $\left\{\dfrac{1}{x^n}\right\}=0\Rightarrow x^n\in\mathbb{N}$, $\dfrac{1}{x^n}\in\mathbb{N}\Rightarrow x^n=1\Rightarrow x=1$, imposibil **1p**

Deoarece $0\le\{y\}<1$, pentru orice număr real $y\Rightarrow\{x^n\}+\left\{\dfrac{1}{x^n}\right\}<2$ **1p**

Deci $0<\{x^n\}+\left\{\dfrac{1}{x^n}\right\}<2$ și $\{x^n\}+\left\{\dfrac{1}{x^n}\right\}\in\mathbb{N}\Rightarrow\{x^n\}+\left\{\dfrac{1}{x^n}\right\}=1$, deci $\{x^{2026}\}+\left\{\dfrac{1}{x^{2026}}\right\}=1$ **2p**

Subiectul 2. (*20 puncte*)

Se consideră funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+x+1$ și $g_m:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g_m(x)=2x^2-(m+1)x+3m+4$, $m\in\mathbb{R}$.

a) Arătați că expresia $E(x)=f(\sin^2 x)-f(\cos^2 x)+2\cos 2x$ este constantă, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

b) Aflați $m\in\mathbb{R}$ pentru care dreapta de ecuație $y=2x+m$ este tangentă la graficul funcției g_m.

c) Aflați maximul și minimul funcției $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $h(x)=\dfrac{f(x)}{g_0(x)}$.

SOLUȚIE:

a) $E(x)=(\sin^4 x+\sin^2 x+1)-(\cos^4 x+\cos^2 x+1)+2\cos 2x=\sin^4 x-\cos^4 x+\cos^2 x-\sin^2 x$ **2p**

$E(x)=(\sin^2 x-\cos^2 x)(\sin^2 x+\cos^2 x)+\cos^2 x-\sin^2 x=\sin^2 x-\cos^2 x+\cos^2 x-\sin^2 x=0$ **2p**

$E(x)$ are valoare constantă, pentru orice $x\in\mathbb{R}$ **1p**

b) Dreapta de ecuație $y=2x+m$ este tangentă la graficul funcției g_m, dacă sistemul de ecuații $\begin{cases}y=g_m(x)\\ y=2x+m\end{cases}$ are soluție unică, de unde rezultă că ecuația $g_m(x)=2x+m$ are soluție unică **1p**

Ecuația $2x^2-(m+3)x+2m+4=0$ are soluție unică, de unde rezultă că $\Delta=(m+3)^2-8(2m+4)=0$ **2p**

$m^2-10m-23=0\Rightarrow m\in\{5\pm4\sqrt{3}\}$ **2p**

c) Se determină imaginea funcției $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $h(x)=\dfrac{x^2+x+1}{2x^2-x+4}$.

$y\in\operatorname{Im}h\Leftrightarrow$ ecuația $(2y-1)x^2-(y+1)x+4y-1=0$ are cel puțin o soluție $x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\Delta\ge0$ **3p**

$\Delta=-31y^2+26y-3\ge0\Leftrightarrow y\in\left[\dfrac{13-2\sqrt{19}}{31},\dfrac{13+2\sqrt{19}}{31}\right]$, obținem că $\operatorname{Im}h=\left[\dfrac{13-2\sqrt{19}}{31},\dfrac{13+2\sqrt{19}}{31}\right]$ **3p**

deci $\min\limits_{x\in\mathbb{R}}h(x)=\dfrac{13-2\sqrt{19}}{31}$ și $\max\limits_{x\in\mathbb{R}}h(x)=\dfrac{13+2\sqrt{19}}{31}$ **4p**

Subiectul 3. (*20 puncte*)

Fie $ABCD$ un paralelogram și punctele M, N, P pe segmentele deschise AD, AB, respectiv BC, astfel încât $\mathcal{A}_{MQCD} = \mathcal{A}_{NBPQ}$, unde $MP \cap CN = \{Q\}$, iar $\frac{AM}{AD} = a$, $\frac{AN}{AB} = b$, $\frac{BP}{BC} = c$.

a) Demonstrați că $b+1 = a+c$.

b) Dacă $E, F \in AC$ astfel încât $AE = EF = FC$, demonstrați că centrul de greutate al triunghiului MNP aparține segmentului deschis EF.

SOLUȚIE:

a) Din $\mathcal{A}_{MQCD} = \mathcal{A}_{NBPQ}$, adunând în ambii membri $\mathcal{A}_{ANQM}$ obținem că $\mathcal{A}_{ANCD} = \mathcal{A}_{ABPM}$ **3p**

Cum $ANCD$, $ABPM$ sunt trapeze, $\frac{(AN+CD)\cdot d(A,CD)}{2} = \frac{(BP+AM)\cdot d(B,AD)}{2}$ **3p**

Deoarece $\mathcal{A}_{ABCD} = CD \cdot d(A,CD) = AD \cdot d(B,AD) \Rightarrow \frac{AN+CD}{CD} = \frac{BP+AM}{AD} \Rightarrow b+1 = a+c$ **4p**

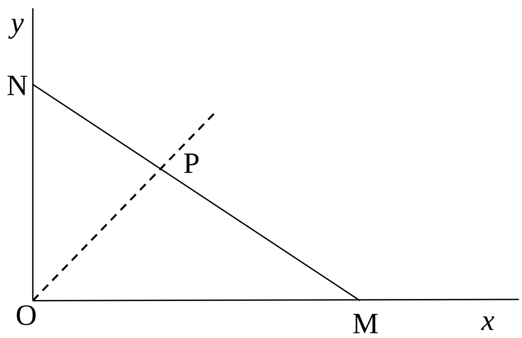
b) Dacă G este centrul de greutate al triunghiului MNP, atunci $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{AP}\right)$ **3p**

$\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\left(a \cdot \overrightarrow{AD} + b \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} + c \cdot \overrightarrow{BC}\right)$ și, cum $b+1 = a+c$, obținem că $\overrightarrow{AG} = \frac{b+1}{3}\overrightarrow{AC}$, deci $G \in AC$ **4p**

Cum $b \in (0,1)$, avem că $\frac{b+1}{3} \in \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$, deci $G \in (EF)$ **3p**

Subiectul 4. (*30 puncte*)

Un fermier bogat are un teren de arie infinită. Pe terenul său, xOy, $Ox \perp Oy$, fermierul vrea să construiască un gard MN, M un punct situat pe latura Ox, iar N un punct situat pe latura Oy, astfel încât MN să treacă prin punctul P, situat pe bisectoarea unghiului xOy, $OP = 400$ m (vezi figura alăturată). Arătați că:



a) $\frac{1}{OM} + \frac{1}{ON} = \frac{\sqrt{2}}{400}$;

b) $OM + ON \geq 800\sqrt{2}$ m;

c) lungimea minimă a gardului MN este egală cu 800 m și în acest caz, $MN \perp OP$.

SOLUȚIE:

a) Construim $PQ \perp OM$, cu $Q \in OM$ și $PR \perp ON$, cu $R \in ON$. Deoarece OP este bisectoarea unghiului $\sphericalangle MON$, atunci $\sphericalangle POM = \sphericalangle POQ = 45^\circ$, ceea ce implică faptul că $\triangle POQ$ este dreptunghic isoscel. În mod analog, triunghiul $\triangle POR$ este dreptunghic isoscel, iar, din construcție, avem $PROQ$ dreptunghi. Prin urmare, $PROQ$ este un pătrat. **3p**

Cum diagonala pătratului $PROQ$ este $OP = 400$, atunci $OQ = PQ = OR = 200\sqrt{2}$. **1p**

Fie $OM = m$ și $ON = n$.

Din $QP \parallel ON$, avem $\triangle MQP \sim \triangle MON$, de unde obținem:

$\frac{MQ}{OM} = \frac{PQ}{ON} \Rightarrow \frac{OM - OQ}{OM} = \frac{OQ}{ON} \Rightarrow \frac{m - 200\sqrt{2}}{m} = \frac{200\sqrt{2}}{n}$. **3p**

Atunci:

$\frac{m}{m}-\frac{200\sqrt{2}}{m}=\frac{200\sqrt{2}}{n}\Rightarrow 1=200\sqrt{2}\cdot\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right)\Rightarrow\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=\frac{1}{200\sqrt{2}}$, ceea ce trebuia demonstrat. **3p**

b) Din inegalitatea mediilor (media aritmetică ≥ media armonică), avem:

$\frac{m+n}{2}\geq\frac{2}{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}\Rightarrow\frac{m+n}{2}\geq\frac{2}{\frac{1}{200\sqrt{2}}}\Rightarrow$ **5p**

$\frac{m+n}{2}\geq 400\sqrt{2}\Rightarrow m+n\geq 800\sqrt{2}.$ **5p**

c) Din inegalitatea mediilor (media pătratică ≥ media armonică), avem:

$\sqrt{\frac{m^2+n^2}{2}}\geq\frac{2}{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}\Rightarrow\sqrt{\frac{m^2+n^2}{2}}\geq\frac{2}{\frac{1}{200\sqrt{2}}}\Rightarrow\sqrt{\frac{m^2+n^2}{2}}\geq 400\sqrt{2}\Rightarrow$ **4p**

$m^2+n^2\geq 2\cdot\left(400\sqrt{2}\right)^2\Rightarrow m^2+n^2\geq 800^2\Rightarrow\sqrt{m^2+n^2}\geq 800.$ **4p**

Cum $OM=m$ și $ON=n$, din teorema lui Pitagora găsim $MN=\sqrt{m^2+n^2}\geq 800$, adică ceea ce trebuia demonstrat. **1p**

Valoarea minimă se atinge pentru $m=n$, în cazul de egalitate $\Rightarrow \triangle OMN$ este isoscel și OP este bisectoare în $\triangle OMN\Rightarrow OM\perp OP$ **1p**

Notă:

*Toate subiectele sunt obligatorii; se acordă **10 puncte din oficiu**.*

Orice rezolvare corectă a oricărei probleme, dar diferită de cea din barem se notează cu punctaj echivalent.

Punctajul maxim este de 100 de puncte.

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
„ADOLF HAIMOVICI”
Ediția a XXVIII-a
ETAPA NAȚIONALĂ – 16 mai 2026

Clasa a X–a – Secțiunea H2 – Profil real, specializarea științe ale naturii

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

Subiectul 1. (*20 puncte*)
Rezolvați în mulțimea numerelor complexe ecuația

$$\left(3z^2+z+1\right)^2+\left(z^2+2z+2\right)^2=0.$$

SOLUȚIE 1:
Efectuând ridicările la putere în membrul stâng și reducând termenii asemenea, ecuația se scrie sub forma $10z^4+10z^3+15z^2+10z+5=0$, sau $2z^4+2z^3+3z^2+2z+1=0$. 5p
Grupând convenabil termenii, avem:
$2z^4+2z^3+3z^2+2z+1=2z^2\left(z^2+1\right)+2z\left(z^2+1\right)+\left(z^2+1\right)=\left(z^2+1\right)\left(2z^2+2z+1\right)$. 5p

Ecuația $z^2+1=0$ are soluțiile $z_1=-i,\ z_2=i$. 5p

Ecuația $2z^2+2z+1=0$ are soluțiile $z_3=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i,\ z_4=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$. 5p

SOLUȚIE 2:
Observăm că $a^2+b^2=\left(a+ib\right)\left(a-ib\right)$, oricare ar fi numerele complexe a și b. 5p
Folosind această identitate, ecuația din enunț se scrie sub forma
$\left(\left(3+i\right)z^2+\left(1+2i\right)z+1+2i\right)\left(\left(3-i\right)z^2+\left(1-2i\right)z+1-2i\right)=0$. 5p

Ecuația $\left(3+i\right)z^2+\left(1+2i\right)z+1+2i=0$ are discriminantul $\Delta_1=-7-24i=\left(3-4i\right)^2$, iar soluțiile sale sunt $z_1=-i,\ z_2=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$. 5p

Analog, ecuația $\left(3-i\right)z^2+\left(1-2i\right)z+1-2i=0$ are soluțiile $z_3=i,\ z_4=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$. 5p

Subiectul 2. (*20 puncte*)
Spunem că o funcție $f:\left(0,+\infty\right)\to\mathbb{R}$ este *lentă* dacă satisface simultan condițiile:

(i) $f\left(x\right)\le\ln x,\ \forall x\in\left(0,+\infty\right)$; (ii) $f\left(x\cdot y\right)\le f\left(x\right)+f\left(y\right),\ \forall x,y\in\left(0,+\infty\right)$.

a) Dacă f este o funcție lentă, demonstrați că $f\left(1\right)=0$.
b) Determinați funcțiile lente.

SOLUȚIE:
a) Luând $x=1$ în (i) obținem că $f\left(1\right)\le 0$. 4p

Luând $x=y=1$ în (ii) obținem că $f\left(1\right)\le 2f\left(1\right)$, deci $f\left(1\right)\ge 0$. Deducem că $f\left(1\right)=0$. 4p

b) Luând $y=\frac{1}{x}$ în (ii) obținem că $f\left(1\right)\le f\left(x\right)+f\left(\frac{1}{x}\right),\forall x>0$. 4p

Rezultă că $-f\left(\frac{1}{x}\right)\le f(x)$. Cum $f\left(x\right)\le\ln x$, deducem că $-f\left(\frac{1}{x}\right)\le\ln x,\forall x>0$. 4p

Atunci $f\left(\frac{1}{x}\right) \geq -\ln x$, adică $f\left(\frac{1}{x}\right) \geq \ln\frac{1}{x}, \forall x > 0$. Trecem $x \to \frac{1}{x}$ și obținem că $f(x) \geq \ln x, \forall x > 0$. În concluzie, unica funcție lentă este $f:(0,+\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln x$. 4p

Subiectul 3. (*20 puncte*)
Raportăm planul la un sistem cartezian de coordonate xOy. Un pătrat $ABCD$ are vârful A pe semiaxa pozitivă Ox, vârful B pe semiaxa pozitivă Oy și centrul P, de abscisă 2, situat în primul cadran.
a) Determinați ordonata punctului P.
b) Aflați coordonatele vârfurilor pătratului care are latura cu cea mai mică lungime posibilă.

SOLUȚIE 1:
a) Fie $A(a,0), a>0$, $B(0,b), b>0$ și $P(2,k)$.
Întrucât P este mijlocul diagonalei AC, deducem că $x_C = 4-a$ și $y_C = 2k$.
Deoarece P este mijlocul diagonalei BD, deducem că $x_D = 4$ și $y_D = 2k-b$. 4p
Din $AB = AD$ obținem că $a^2+b^2 = (4-a)^2 + (2k-b)^2$, prin urmare $2a+kb = k^2+4$.
Din $AC = BD$ obținem că $(4-2a)^2 + 4k^2 = 4^2 + (2k-2b)^2$, așadar $4a-2kb = a^2-b^2$. 4p
Înmulțind membru cu membru, avem $(k^2+4)(a^2-b^2) = 2(4a^2-k^2b^2)$, de unde $k^2a^2-4a^2 = 4b^2-k^2b^2$, deci $(k^2-4)(a^2+b^2) = 0$.
A doua paranteză nu se poate anula. Găsim unica soluție convenabilă $k=2$. 4p
b) Din relația $2a+kb = k^2+4$, cum $k=2$, obținem că $b = 4-a$. Atunci
$AB^2 = a^2+b^2 = 2a^2-8a+16$. 4p
Observăm că $AB^2 = 2(a-2)^2+8$ este minim când $a=2$ (de unde $b=2$). În acest caz, vârfurile pătratului au coordonatele $A(2,0), B(0,2), C(2,4), D(4,2)$. 4p

SOLUȚIE 2:
a) Patrulaterul $OAPB$ are unghiurile opuse O și P drepte, deci suplementare. Rezultă că $OAPB$ este un patrulater inscriptibil. 4p
Deducem că $POA \equiv PBA$. Triunghiul PAB este dreptunghic isoscel, prin urmare $PBA = 45^\circ$, de unde $POA = 45^\circ$. 4p
Astfel, punctul P este situat pe prima bisectoare a sistemului de axe, deci abscisa și ordonata acestui punct sunt egale. Întrucât $x_P = 2$, rezultă că $y_P = 2$. 4p
b) Segmentul AB este diametru al cercului circumscris patrulaterului $OAPB$ (unghiul O este drept, deci este înscris într-un semicerc), iar OP este coardă a acestui cerc. Înseamnă că $AB \geq OP$. 4p
Segmentul OP are lungime constantă $2\sqrt{2}$. Latura AB a pătratului din enunț este minimă atunci când $AB = OP$, caz în care OP devine diametru al cercului. Atunci patrulaterul $OAPB$ va fi pătrat, iar coordonatele vârfurilor sale vor fi $A(2,0), B(0,2), C(2,4), D(4,2)$. 4p

Subiectul 4. (*30 puncte*)
Alin, Bianca, Cristi, Dan, Emilia și Florina participă la un concurs unde fiecare copil trebuie să joace câte o partidă cu fiecare dintre ceilalți cinci. Toate partidele se joacă la ore diferite.
La un moment dat pe parcursul concursului, Alin a jucat cinci partide, Bianca patru, Cristi trei, Dan două și Emilia o singură partidă.
Câte partide a jucat Florina până la acel moment?

SOLUȚIE 1:
Alin a jucat cinci partide. Cum nu poate juca cu el însuși, atunci a jucat cu toți ceilalți. Rezultă că Bianca a mai jucat trei partide cu alți participanți, Cristi alte două partide, Dan o singură altă partidă, iar Emilia nu a mai jucat cu nimeni. Cu alte cuvinte, Alin și Emilia au „ieșit” din joc (nu mai numărăm alte partide jucate de aceștia). 10p
Rămân astfel patru persoane care „mai sunt în joc”: Bianca, Cristi, Dan și Florina. Deoarece Bianca a jucat alte trei partide și mai sunt doar alți trei participanți posibili, atunci Bianca a jucat cu fiecare dintre ei, adică au avut loc meciurile dintre Bianca și Cristi, Bianca și Dan și Bianca și Florina. 5p
Ne rămâne, astfel, următoarea situație: „mai sunt în joc” doar Cristi, Dan și Florina, iar Cristi a mai jucat un meci cu cineva, însă Dan nu. Prin urmare, Cristi a jucat cu Florina. 10p
Obținem astfel concluzia: Florina a jucat cu Alin, Bianca și Cristi, adică a jucat trei partide. 5p

SOLUȚIE 2:
Notăm cu n numărul partidelor jucate de Florina. La fiecare partidă sunt implicați câte doi copii. Înseamnă că numărul total de partide jucate până în momentul din enunțul problemei este
$(5+4+3+2+1+n):2=(15+n):2$. 5p
Deducem de aici că n este un număr impar. Cum $n\le 5$, înseamnă că $n\in\{1,3,5\}$. 5p
Nu putem avea $n=1$: în caz contrar, unica partidă jucată de Florina este cea în compania lui Alin (care a jucat cu toți ceilalți cinci copii). Înseamnă că cele patru partide ale Biancăi nu o implică pe Florina. Rezultă că atât Alin, cât și Bianca au jucat cu Emilia, fals! (Emilia a jucat o singură partidă) 5p
Nu putem avea $n=5$: în caz contrar, atât Alin, cât și Florina au jucat cu toți ceilalți copii, în afară de ei înșiși. Astfel, atât Alin, cât și Florina au jucat cu Emilia, fals! (Emilia a jucat o singură partidă) 5p
Vom arăta că $n=3$. Pentru asta, trebuie să găsim o modalitate de împerechere a copiilor astfel încât, până la un moment dat, să se joace un total de 9 partide respectând ipotezele problemei.
Indicând fiecare copil prin inițiala prenumelui, putem considera următoarea distribuție:
A joacă partide cu B, C, D, E, F
B joacă partide cu (A), C, D, F
C joacă partide cu (A), (B), F
D joacă partide cu (A), (B)
E joacă partidă cu (A)
F joacă partide cu (A), (B), (C)
În concluzie, Florina a jucat trei partide până în momentul din enunțul problemei. 10p

Notă:
*Toate subiectele sunt obligatorii; se acordă **10 puncte din oficiu**.*
Orice rezolvare corectă a oricărei probleme, dar diferită de cea din barem se notează cu punctaj echivalent.
Punctajul maxim este de 100 de puncte.

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ „ADOLF HAIMOVICI”

Ediția a XXVIII-a

ETAPA NAȚIONALĂ – 16 mai 2026

Clasa a XI–a – Secțiunea H2 – Profil real, specializarea științe ale naturii

Subiectul 1. (*20 puncte*) Fie triunghiul nedegenerat ABC cu laturile $AB = c, BC = a, CA = b$ și sistemul $\begin{cases} ay + bx = c \\ cx + az = b \\ bz + cy = a \end{cases}$.

a) Rezolvați sistemul în cazul $AB = 3, BC = 4, CA = 5$

b) Arătați că sistemul are soluție unică, oricare ar fi triunghiul ABC.

c) Arătați că, dacă (x_0, y_0, z_0) este soluția sistemului, atunci $x_0, y_0, z_0 \in (-1,1)$.

SOLUȚIE:

a) $(x, y, z) = \left(\frac{3}{5}, 0, \frac{4}{5}\right)$ 5p

b) $\Delta = \begin{vmatrix} b & a & 0 \\ c & 0 & a \\ 0 & c & b \end{vmatrix} = -2abc$ 5p

c) $(x_0, y_0, z_0) = \left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}, \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}, \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right)$ 6p

$(x_0, y_0, z_0) = (cosA, cosB, cosC)$ 3p

$cosA, cosB, cosC \in (-1,1) \Leftrightarrow x_0, y_0, z_0 \in (-1,1)$ 1p

Subiectul 2. (*20 puncte*) Fie matricea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ și notăm cu $\text{tr}A = a + d$ urma matricei A. Să se demonstreze că:

a) $\text{tr}(A \cdot A^t + A^t \cdot A^*) = (\text{tr}A)^2$, unde A^t este transpusa matricei A, iar A^* adjuncta acesteia.

b) Dacă $|b| \neq |c|$ atunci $A \cdot A^t - A^t \cdot A$ este inversabilă.

SOLUȚIE:

a) $A \cdot A^t + A^t \cdot A^* = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} =$

$\begin{pmatrix} a^2+b^2 & ac+bd \\ ac+bd & c^2+d^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ad-c^2 & ac-ab \\ bd-cd & ad-b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+b^2+ad-c^2 & 2ac+bd-ab \\ ac+2bd-cd & c^2+d^2+ad-b^2 \end{pmatrix}$ 6p

$tr(A \cdot A^t + A^t \cdot A^*) = a^2 + b^2 + ad - c^2 + c^2 + d^2 + ad - b^2 =$

$a^2 + 2ad + d^2 = (a+d)^2 = (trA)^2$ 4p

b) $A \cdot A^t - A^t \cdot A = \begin{pmatrix} b^2-c^2 & (a-d)(c-b) \\ (a-d)(c-b) & c^2-b^2 \end{pmatrix}$ 4p

$\det(A \cdot A^t - A^t \cdot A) = -(b-c)^2((b+c)^2 + (a-d)^2)$ 2p

Dar $\det(A \cdot A^t - A^t \cdot A) \neq 0$ deoarece $(b+c)^2 + (a-d)^2 > 0$, iar $|b| \neq |c|$, din ipoteză. În concluzie matricea $A \cdot A^t - A^t \cdot A$ este inversabilă 4p

Subiectul 3. (*20 puncte*)

a) Se consideră funcțiile $f, g: [0,1] \to \mathbb{R}$, continue pe $[0,1]$ și derivabile pe $(0,1)$. Demonstrați că, dacă $f(0) = f(1) = 0$ și $f'(x)g(x) - f(x)g'(x) \neq 0$, oricare ar fi $x \in (0,1)$, atunci există cel puțin un punct $x_0 \in [0,1]$ astfel încât

$g(x_0) = 0$.

b) Să se demonstreze inegalitatea: $e^{-x} \geq 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!}, (\forall) x \in (-\infty, 0]$.

SOLUȚIE:

a) Se consideră funcția $h : [0,1] \to \mathbb{R}, h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ și presupunem că **nu** există niciun punct $x_0 \in [0,1]$ astfel încât $g(x_0) = 0$ 2p

$h'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$ 2p

Funcția h îndeplinește condițiile teoremei lui Rolle $\Longrightarrow \exists c \in (0,1)$ astfel încât $h'(c) = 0$ 2p

$\frac{f'(c)g(c) - f(c)g'(c)}{g^2(c)} = 0 \Leftrightarrow f'(c)g(c) - f(c)g'(c) = 0$ (contrazice ipoteza problemei) 2p

Presupunerea făcută este falsă 2p

b) considerăm funcția $f : [x,0] \to R, f(t) = e^{-t} - 1 + \frac{t}{1!} - \frac{t^2}{2!}, (\forall) t \in [x,0]$.

Verifică teorema lui Lagrange pentru $t \in [x,0]$: funcția f este continuă pentru $t \in [x,0]$ și derivabilă pe $(x,0)$ 2p

Prin urmare există $c \in (x,0)$ astfel încât $f(0) - f(x) = (0 - x) \cdot f'(c)$ sau $f(x) = x \cdot f'(c), (\forall) x < 0$ 2p

Explicit, avem relația:

$e^{-x} - 1 + \frac{x}{1!} - \frac{x^2}{2!} = \underset{<0}{x} \cdot \underbrace{(-e^{-c} + 1 - c)}_{<0}, (\forall) x < 0$ 3p

Observație: expresia $-e^{-c} + 1 - c < 0$ rezultă din inegalitatea cunoscută $e^t \geq t + 1, (\forall) t \in \mathbb{R}$ (Bernoulli)

Deoarece membrul drept al relației este pozitiv, se obține inegalitatea: $e^{-x} - 1 + \frac{x}{1!} - \frac{x^2}{2!} \geq 0, (\forall) x \in (-\infty, 0]$, cu egalitate pentru $x = 0$ 3p

Subiectul 4. (*30 puncte*) Pasionat de robotică, Bogdan construiește 3 roboți pentru un concurs. . Deplasarea celor 3 roboți este programată astfel încât roboții, care pornesc în același moment, să urmeze traiectorii în intervalul de timp $[0,T]$ (timpul *T* este exprimat în ore) cu *T*>1, astfel: un robot se deplasează după o traiectorie $f(x) = x^3 + ax + b, a, b \in \mathbb{R}$, iar al doilea robot se deplasează după traiectoria $g(x) = 3x^2 + cx + 4, c \in \mathbb{R}$.

a) Determinați coeficienții *a,b,* și *c* astfel încât traiectoriile primilor doi roboți să fie tangente după o oră, iar cel de-al treilea robot să se deplaseze pe traiectoria dreptei tangente comune primilor două traiectorii, știind că tangenta comună este paralelă cu dreapta de ecuație $y = x + 3$.

b) Pentru a, b și c determinați la punctul a), aflați traiectoria celui de-al treilea robot.

SOLUȚIE:

a) Din $f(1) = g(1)$ se obține relația $a + b - c = 6$ 5p

Din $f'(1) = g'(1) = 1$ rezultă $3 + a = 1, 6 + c = 1$ 5p

Se obține $a = -2, b = 3, c = -5$ 5p

b) Funcțiile care modelează traiectoriile celor doi roboți pe intervalul $[0,T]$ sunt

$f(x) = x^3 - 2x + 3$ și $g(x) = 3x^2 - 5x + 4$ 2p

Din $f(1) = g(1) = 2$ și $f'(1) = g'(1) = 1$ și se obține ecuația tangentei comune: $y - 2 = 1(x - 1)$ 8p

Traiectoria celui de-al treilea robot este $y = x + 1$ 5p

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
„ADOLF HAIMOVICI”
Ediția a XXVIII-a
ETAPA NAȚIONALĂ – 16 mai 2026

Clasa a XII–a – Secțiunea H2 – Profil real, specializarea științe ale naturii

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

Subiectul 1. (*20 puncte*)

Matei are enunțul parțial al unei probleme. Trebuie să demonstreze că funcția $f:\mathbb{R}\to G$, $f(x)=\dfrac{1-e^x}{1+e^x}$ este un izomorfism între grupurile $(\mathbb{R},+)$ și $(G,*)$. Rezolvați următoarele cerințe:

a) Arătați că $G=(-1,1)$ și $x*y=\dfrac{x+y}{1+xy}$ pentru orice $x,y\in G$.

b) Fie $H=\left\{\dfrac{1-e^a}{1+e^a}\ ,\ a\in\mathbb{Q}\right\}$. Arătați că $(H,*)$ este subgrup al grupului $(G,*)$.

c) Calculați $\dfrac{1}{2}*\dfrac{1}{3}*\dfrac{1}{4}*...*\dfrac{1}{n}$, $n\in\mathbb{N},\ n\geq 2$.

SOLUȚIE:

a) f este funcție bijectivă $\Rightarrow G=\operatorname{Im} f=(-1,1)$ 4p

f este funcție bijectivă $\Rightarrow f$ este inversabilă $f^{-1}:G\to\mathbb{R},\ f^{-1}(x)=\ln\dfrac{1-x}{1+x}$ 2p

f este morfism $\Rightarrow f(x+y)=f(x)*f(y),\ \forall x,y\in\mathbb{R}$ 1p

Fie $u,v\in G\Rightarrow u=f(x),\ v=f(y),\ x,y\in\mathbb{R}$, deci $u*v=f(x)*f(y)=f(x+y)=f\left(f^{-1}(u)+f^{-1}(v)\right)=$

$$=f\left(\ln\left(\frac{1-u}{1+u}\cdot\frac{1-v}{1+v}\right)\right)=\frac{1-\dfrac{1-u}{1+u}\cdot\dfrac{1-v}{1+v}}{1+\dfrac{1-u}{1+u}\cdot\dfrac{1-v}{1+v}}=\frac{u+v}{1+uv}$$ 2p

b) Fie $t\in H\Rightarrow t=\dfrac{1-e^a}{1+e^a},\ a\in\mathbb{Q}\Rightarrow t\in(-1,1)\Rightarrow t\in G$, deci $H\subset G$.

Elementul neutru în G este 0 iar simetricul unui element $x\in G$ este $x'=-x\in G$.

Cum $0=\dfrac{1-e^0}{1+e^0}\Rightarrow 0\in H$. Dacă $x=\dfrac{1-e^a}{1+e^a}\in H$, atunci $x'=-x=\dfrac{e^a-1}{e^a+1}=\dfrac{1-e^{-a}}{1+e^{-a}}\in H$

În concluzie, $(H,*)$ este subgrup al grupului $(G,*)$ 6p

c) $g=f^{-1}:G\to\mathbb{R}$ este izomorfism de la G la $\mathbb{R}$.

Dacă $a=\dfrac{1}{2}*\dfrac{1}{3}*\dfrac{1}{4}*...*\dfrac{1}{n}$, $n\in\mathbb{N},\ n\geq 2$, atunci

$$g(a)=g\left(\frac{1}{2}*\frac{1}{3}*\frac{1}{4}*...*\frac{1}{n}\right)=g\left(\frac{1}{2}\right)+g\left(\frac{1}{3}\right)+...+g\left(\frac{1}{n}\right)=\ln\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{3}{5}\cdot...\cdot\frac{n-1}{n+1}\right)=\ln\frac{2}{n^2+n}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ln\frac{1-a}{1+a}=\ln\frac{2}{n^2+n}\Rightarrow a=\frac{n^2+n-2}{n^2+n+2}$$

Sau inductiv $\frac{1}{2} * \frac{1}{3} * \frac{1}{4} * \ldots * \frac{1}{n} = \frac{n^2+n-2}{n^2+n+2}$ 5p

Subiectul 2. (*20 puncte*)

Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^{x^2}$ și $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, primitiva funcției f care verifică $F(1)=0$.

a) Calculați $\int_0^1 xf(x)dx$.

b) Calculați $\int_0^1 F(x)dx$.

c) Arătați că $\lim\limits_{x\to\infty} F(x)=\infty$ și calculați $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^{2x}F(x)}{F(x+1)}$.

SOLUȚIE:

a) $\int_0^1 xf(x)dx = \int_0^1 xe^{x^2}dx = \frac{1}{2}e^{x^2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}(e-1)$ 6p

b) $\int_0^1 F(x)dx = \int_0^1 x'F(x)dx = xF(x)\big|_0^1 - \int_0^1 xF'(x)dx = -\int_0^1 xe^{x^2}dx = \frac{1-e}{2}$ 6p

c) Fie $G(x)=F(x)-e^x$, $x\ge 1$. $G'(x)=e^{x^2}-e^x\ge 0$, G crescătoare,

$x\ge 1 \Rightarrow G(x)\ge G(1) \Rightarrow F(x)\ge e^x - e,\ \forall x\ge 1 \Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty}F(x)=\infty$. 3p

SAU: pentru $x\ge 1$ T. Lagrange pe $[1,x]$ $\Rightarrow \exists c_x \in (1,x)$

$F(x)-F(1)=(x-1)F'(c_x)=(x-1)e^{c_x^2}\ge (x-1)e \Rightarrow F(x)\ge (x-1)e$ și $\lim\limits_{x\to\infty}F(x)=\infty$

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^{2x}F(x)}{F(x+1)} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim\limits_{x\to\infty}\frac{2e^{2x}F(x)+e^{2x}\cdot e^{x^2}}{e^{(x+1)^2}} = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{2F(x)+e^{x^2}}{e^{x^2+1}} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim\limits_{x\to\infty}\frac{2e^{x^2}+2xe^{x^2}}{2xe^{x^2+1}} = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{1+x}{xe} = \frac{1}{e}$ 5p

Subiectul 3. (*20 puncte*)

Considerăm polinomul $f = X^{2026} + a_1X^{2025} + \ldots + a_{2025}X - 1$, $f\in\mathbb{R}[X]$, cu rădăcinile $z_1, z_2, \ldots, z_{2026} \in \mathbb{C}$ care verifică $|z_1|\ge 1$, $|z_2|\ge 1, \ldots, |z_{2026}|\ge 1$.

a) Arătați că f are cel puțin două rădăcini reale.

b) Demonstrați că $|z_1|=|z_2|=\ldots=|z_{2026}|$.

c) Arătați că X^2-1 îl divide pe f.

SOLUȚIE:

a) $f(0)=-1<0$, $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\infty \Rightarrow f$ are cel puțin o rădăcină în $(-\infty,0)$ și cel puțin o rădăcină în $(0,\infty)$ 5p

b) $z_1\cdot z_2\cdot\ldots\cdot z_{2026}=-1$ 2p

$|z_1\cdot z_2\cdot\ldots\cdot z_{2026}|=1$ 2p

$|z_1|\cdot|z_2|\cdot\ldots\cdot|z_{2026}|=1$, $|z_1|\ge 1$, $|z_2|\ge 1,\ldots, |z_{2026}|\ge 1 \Rightarrow |z_1|=|z_2|=\ldots=|z_{2026}|=1$ 2p

c) din a) există $z_i\in(-\infty,0)$ iar din b) $|z_i|=1$ deci $z_i=-1$ 3p

din a) există $z_j\in(0,\infty)$ iar din b) $|z_j|=1$ deci $z_j=1$ 3p

Rezultă $f(-1)=0;\ f(1)=0$, deci $X^2-1 \mid f$ 3p

Subiectul 4. (*30 puncte*)

Un mobil se deplasează, plecând dintr-un punct A, cu viteza $v(t),\ t \geq 0$, (t măsurat în ore), cu viteza inițială $v_0\ km/h$, ($v_0 = v(0)$).

Notăm cu $S(t)$ spațiul parcurs de mobil, măsurat în km, după t ore. Se știe că $v:[0,\infty) \to [0,\infty)$ este o funcție continuă și satisface condiția $v(x+y) = v(x)+v(y)-v_0$ pentru orice $x, y \geq 0$, iar $S:[0,\infty) \to [0,\infty)$ este o funcție derivabilă.

a) Arătați că $S(x+y) = S(x)+S(y)+x\cdot v(y)-v_0x, \forall x, y \geq 0$.

b) Demonstrați că $v(t) = k\cdot t+v_0,\ k$ constantă reală.

c) Știind că după o oră viteza mobilului este egală cu $72km/h$, determinați viteza inițială v_0, astfel încât mobilul să parcurgă primii $200\ km$ în $2,5$ ore.

(Notă: dacă $S(t)$ este spațiul parcurs de mobil și S este funcție derivabilă, atunci viteza mobilului este $v(t) = S'(t)$, cu $S(0) = 0$.)

SOLUȚIE:

a) S este primitivă a funcției continue v 2p

integrând după t relația: $v(t+y) = v(t)+v(y)-v_0 \Rightarrow \int_0^x v(t+y)dt = \int_0^x v(t)dt + \int_0^x \left(v(y)-v_0\right)dt$ 5p

$S(t+y)\Big|_0^x = S(t)\Big|_0^x + t(v(y)-v_0)\Big|_0^x$ 3p

$S(x+y)-S(y) = S(x)-S(0)+x(v(y)-v_0)$, deci $S(x+y) = S(x)+S(y)+x\cdot v(y)-x\cdot v_0$

$\left(S(0)=0\right)$ 3p

b) Schimbăm x cu y la punctul a). Astfel $x(v(y)-v_0) = y(v(x)-v_0),\ \forall x,\ y \geq 0$.

Pentru $x, y > 0 \Rightarrow \dfrac{v(x)-v_0}{x} = \dfrac{v(y)-v_0}{y}, \forall x, y > 0$ 3p

Deci $\dfrac{v(x)-v_0}{x}$ este funcție constantă, astfel $\dfrac{v(x)-v_0}{x} = k, \forall x > 0 \Rightarrow v(x) = kx+v_0,\ \forall x > 0$ 3p

Cum $v(0) = v_0 \Rightarrow v(x) = kx+v_0,\ \forall x \geq 0$ 1p

c) $v(t) = kt+v_0, t \geq 0$ 1p

S primitivă a funcției $v \Rightarrow S(t) = k\dfrac{t^2}{2}+v_0t+C$ 2p

Cum $S(0) = 0 \Rightarrow S(t) = k\dfrac{t^2}{2}+v_0t,\ t \geq 0$ 2p

$v(1) = 72,\ S\left(\dfrac{5}{2}\right) = 200$ 3p

$k+v_0 = 72,\ \Rightarrow \dfrac{25}{8}\cdot k+v_0\cdot\dfrac{5}{2} = 200$ 1p

$\Rightarrow v_0 = 40\ km/h$ 1p

Notă:
*Toate subiectele sunt obligatorii; se acordă **10 puncte din oficiu**.*
Orice rezolvare corectă a oricărei probleme, dar diferită de cea din barem se notează cu punctaj echivalent.
Punctajul maxim este de 100 de puncte.